PRACTISE 练习册

参考答案

详解 扫码获取详析

第六章 平面向量及其应用

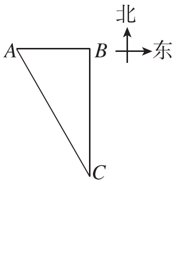
6.1 平面向量的概念

6.1.1 向量的实际背景与概念

6.1.2 向量的几何表示

6.1.3 相等向量与共线向量

1. B 【解析】两个单位向量可能方向不同，不一定相等，所以选项 A 不正确；重力既有大小又有方向，是向量，所以选项 B 正确；向量是既有大小，又有方向的量，可以用有向线段表示，但不能说向量就是有向线段，所以选项 C 不正确；若 $\boldsymbol{a}$ 或 $\boldsymbol{b}$ 为零向量，则满足 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行，但 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的方向不一定相同或相反，所以选项 D 不正确. 故选 B.
2. C 【解析】与 $\overrightarrow{AE}$ 平行的向量有 $\overrightarrow{BE}$，$\overrightarrow{FD}$，$\overrightarrow{FC}$，共 3 个.
3. C 【解析】对于 A，当 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$ 时，任意向量都与 $\boldsymbol{b}$ 共线，则 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{c}$ 不一定共线，A 错误；对于 B，向量不能比较大小，B 错误；对于 C，对任意非零向量 $\boldsymbol{a}$，$\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$ 是和它同向的单位向量，C 正确；对于 D，零向量有方向，其方向是任意的，D 错误. 故选 C.
4. C 【解析】对于 A，由图可知，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$ 的起点为 O，$\overrightarrow{AO}$ 的起点为 A，故 A 错误；对于 B，共线向量是方向相同或相反的非零向量，显然 $\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$，$\overrightarrow{AO}$ 不是共线向量，故 B 错误；对于 C，$|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OC}|=|\overrightarrow{AO}|=1$，故 C 正确；对于 D，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$，$\overrightarrow{AO}$ 的方向不同，所以 $\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$，$\overrightarrow{AO}$ 不是相等向量，故 D 错误. 故选 C.
5. A 【解析】因为一架飞机向西飞行 400 km，再向东飞行 500 km，所以飞机飞行的路程 $s=400+500=900$(km)，位移为向东 100 km，所以 $|\boldsymbol{a}|=100$ km，所以 $s-|\boldsymbol{a}|=900-100=800$(km). 故选 A.
6. C 【解析】因为 $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CD}$，所以四边形 $ABCD$ 是平行四边形，又因为 $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AD}|$，所以四边形 $ABCD$ 一定是菱形.
7. B 【解析】与 $\overrightarrow{FE}$ 的模相等的向量有 $\overrightarrow{EF}$，$\overrightarrow{DO}$，$\overrightarrow{OD}$，$\overrightarrow{GH}$，$\overrightarrow{HG}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{BO}$，$\overrightarrow{AO}$，$\overrightarrow{OA}$，共 9 个.
8. BD 【解析】对于 A，若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 都是单位向量，则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的模相等，但是方向不一定相同，故 A 错误；对于 B，模等于 0 的向量只有零向量，故 B 正确；对于 C，若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 是平行向量，则 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的方向相同或相反，且 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的模不一定相等，故 C 错误；对于 D，假设 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 中至少有一个为零向量，因为零向量与任意向量都共线，所以 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线，与题意不符，故假设不成立，故 D 正确. 故选 BD.
9. ABD 【解析】∵三个四边形是全等的菱形，∴$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{EF}|$，$AB/\!/CD/\!/FH$，故 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{FH}$ 共线，又 D，C，E 三点共线，∴$\overrightarrow{DC}$ 与 $\overrightarrow{EC}$ 共线，∴A，B，D 中的结论一定成立. 故选 ABD.
10. $\boldsymbol{0}$ 【解析】因为向量 $\boldsymbol{m}$ 与向量 $\overrightarrow{AB}$ 是平行向量，所以向量 $\boldsymbol{m}$ 与向量 $\overrightarrow{AB}$ 方向相同或相反. 因为向量 $\boldsymbol{m}$ 与 $\overrightarrow{BC}$ 是共线向量，所以向量 $\boldsymbol{m}$ 与向量 $\overrightarrow{BC}$ 方向相同或相反. 又由 A，B，C 是不共线的三点，可知向量 $\overrightarrow{AB}$ 与向量 $\overrightarrow{BC}$ 不共线，则 $\boldsymbol{m}=\boldsymbol{0}$.
11. 南偏东 30° 【解析】如图所示，连接 AC，则 $\tan\angle BAC=\dfrac{BC}{BA}=\dfrac{100\sqrt{3}}{100}=\sqrt{3}$，∵$\angle BAC$ 是 $\triangle ABC$ 的内角，∴$\angle BAC=60°$，∴此人位移的方向是南偏东 30°.



12. $\{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BA},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{CA},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{DA},\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CB},\overrightarrow{BD},\overrightarrow{DB},\overrightarrow{CD},\overrightarrow{DC}\}$

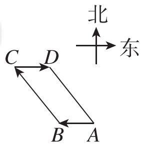
【解析】∵$M=\{A,B,C,D\}$，$T=\{\overrightarrow{PQ}\mid P,Q\in M$ 且 P,Q 不重合$\}$，∴$T=\{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BA},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{CA},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{DA},\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CB},\overrightarrow{BD},\overrightarrow{DB},\overrightarrow{CD},\overrightarrow{DC}\}$.
13. 解：∵E，F，G，H 分别是四边形 $ABCD$ 各边的中点，∴$AC=2EF=2HG$，$BD=2HE=2FG$，$AC/\!/EF/\!/HG$，$BD/\!/HE/\!/FG$，∴四边形 $EFGH$ 是平行四边形.

(1)与向量 $\overrightarrow{HG}$ 相等的向量是 $\overrightarrow{EF}$.

(2)与向量 $\overrightarrow{HG}$ 平行的向量是 $\overrightarrow{GH}$，$\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{CA}$，$\overrightarrow{EF}$，$\overrightarrow{FE}$.

(3)与向量 $\overrightarrow{HG}$ 模相等的向量是 $\overrightarrow{GH}$，$\overrightarrow{EF}$，$\overrightarrow{FE}$.

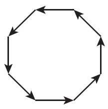
(4)与向量 $\overrightarrow{HG}$ 模相等、方向相反的向量是 $\overrightarrow{GH}$，$\overrightarrow{FE}$.
14. 解：(1)作出向量 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{CD}$，如图所示.



(2)由题意知 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{CD}$ 的方向相反，故 $\overrightarrow{AB}/\!/\overrightarrow{CD}$，又 $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{CD}|$，

∴四边形 $ABCD$ 为平行四边形，

∴$|\overrightarrow{AD}|=|\overrightarrow{BC}|=200$ km.
15. $\dfrac{3}{4}\pi$ 【解析】由 $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$ 可知四边形 $ABCD$ 为平行四边形，由 $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{BD}|=|\overrightarrow{BC}|$，可知四边形 $ABCD$ 为菱形，$\triangle ABD$ 为等边三角形. 菱形 $ABCD$ 的内切圆圆心为 BD 的中点，设内切圆的半径为 r，则 $r=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{BD}|\sin 60°=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，所以内切圆的面积 $S=\pi r^2=\dfrac{3}{4}\pi$.
16. 解：(1)如图所示，操作 8 次后赛车的位移为零向量.

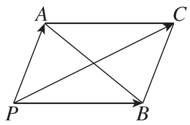


(2)要使赛车行进一周后能回到出发点，只需赛车的位移为零向量，按(1)的方式作图，则所作图形是内角为 $180°-\alpha$ 的正 n 边形，故有 $n(180°-\alpha)=(n-2)180°$，得 $\alpha=\dfrac{360°}{n}$，n 为不小于 3 的整数.

6.2 平面向量的运算

6.2.1 向量的加法运算

1. A 【解析】由向量 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$，得 $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$. 故选 A.
2. D 【解析】$\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$.
3. B 【解析】由题意得，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 表示先向东走 3 km，再向北走 3 km，即向东北走 $3\sqrt{2}$ km. 故选 B.
4. B 【解析】$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DO}=\overrightarrow{DO}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{DC}$. 故选 B.
5. D 【解析】因为 $|\overrightarrow{AB}|=|\boldsymbol{a}|=1$，$|\overrightarrow{BC}|=|\boldsymbol{b}|=1$，$|\overrightarrow{AC}|=|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{2}$，所以 $|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{BC}|^2=|\overrightarrow{AC}|^2$，所以 $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形. 故选 D.
6. D 【解析】如图，根据向量加法的平行四边形法则及 $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{PC}$，可知点 P 在 $\triangle ABC$ 的外部. 故选 D.



7. C 【解析】∵$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DO}+\overrightarrow{OC}$，且 $\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{OC}$，$\overrightarrow{DO}=\overrightarrow{OB}$，∴$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$，∴$AB/\!/CD$ 且 $AB=CD$，∴四边形 $ABCD$ 一定为平行四边形.
8. AC 【解析】由题意，$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DA}=\boldsymbol{0}$，易知 A，C 正确，B 错误；平面向量不能比较大小，故 D 错误. 故选 AC.
9. AC 【解析】因为四边形 $ABCD$ 是平行四边形，所以 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\neq\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$，

$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AD}\neq\overrightarrow{DC}$.故选 AC.

10. 2 【解析】对于①,$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CA}=\mathbf{0}$;对于②,$(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{MB})+\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{AB}$;对于③,$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{CO}=(\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OA})+(\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OC})=\overrightarrow{BA}+\mathbf{0}=\overrightarrow{BA}$;对于④,$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DC}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD})+(\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CA})=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DA}=\mathbf{0}$.综上可知,结果为 $\mathbf{0}$ 的为①④,共 2 个.

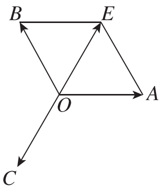
11. 4 【解析】由题意得 $\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{BE}$,所以$|\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DE}|=|\overrightarrow{BE}|=4$.

12. [3,7] 【解析】设该船实际航行的速度为 $\boldsymbol{v}$,因为船的实际航行速度为静水中的航行速度与水流速度的合速度,所以 $||\boldsymbol{v}_{静}|-|\boldsymbol{v}_{水}||\leqslant|\boldsymbol{v}|\leqslant|\boldsymbol{v}_{静}|+|\boldsymbol{v}_{水}|$,故 $5-2\leqslant|\boldsymbol{v}|\leqslant5+2$,则 $3\leqslant|\boldsymbol{v}|\leqslant7$,所以船实际航行速度的大小的取值范围是[3,7].

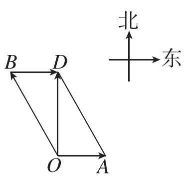
13. **解:**(1)$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{d}=\boldsymbol{d}+\boldsymbol{a}=\overrightarrow{DO}+\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{DA}$.
(2)$\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{CB}$.
(3)$\boldsymbol{e}+\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{e}+(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b})=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{DB}$.
(4)$\boldsymbol{c}+\boldsymbol{f}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{f}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CA}$.

14. **证明:**连接 EF,由题意知,$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}$,$\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CE}$,$\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BF}$.
由 D,E,F 分别为$\triangle ABC$ 的边 BC,AC,AB 的中点可知,$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{CD}$,$\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{FA}$,$\therefore\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD})+(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CE})+(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BF})=(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{BF})+(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CB})=(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{BF})+\mathbf{0}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FA}=\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FA}=\mathbf{0}$.

15. C 【解析】$\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|},\dfrac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|},\dfrac{\boldsymbol{c}}{|\boldsymbol{c}|}$分别为 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 方向上的单位向量,则$|\boldsymbol{p}|=\left|\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}+\dfrac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}+\dfrac{\boldsymbol{c}}{|\boldsymbol{c}|}\right|\leqslant3$,当且仅当 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 方向都相同时,等号成立.作 $\overrightarrow{OA}=\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$,$\overrightarrow{OB}=\dfrac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}$,$\overrightarrow{OC}=\dfrac{\boldsymbol{c}}{|\boldsymbol{c}|}$,当$\angle AOB=\angle BOC=\angle COA=\dfrac{2\pi}{3}$时,如图所示.以 OA,OB 为邻边作平行四边形 $OAEB$,连接 OE,则 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OE}$,且四边形 $OAEB$ 为菱形,$\angle AOE=\dfrac{\pi}{3}$,所以$\triangle AOE$ 为等边三角形,所以$|\overrightarrow{OE}|=1$,又因为$\angle AOC=\dfrac{2\pi}{3}$,$|\overrightarrow{OC}|=1$,所以由图可知 $\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OE}=\mathbf{0}$,即$|\boldsymbol{p}|=|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}|=0$.综上所述,$0\leqslant|\boldsymbol{p}|\leqslant3$.故选 C.



16. **解:**如图,设工作艇在静水中的航行速度为 $\overrightarrow{OB}$,水流速度为 $\overrightarrow{OA}$,工作艇的实际航行速度为 $\overrightarrow{OD}$,连接 AD,BD.
由题意知,$|\overrightarrow{OA}|=12.5$,$|\overrightarrow{OB}|=25$,
∵四边形 $OADB$ 为平行四边形,
$\therefore|\overrightarrow{BD}|=|\overrightarrow{OA}|$,又∵$OD\perp BD$,
∴在 $\mathrm{Rt}\triangle OBD$ 中,$\angle BOD=30°$,
则工作艇的航向为北偏西 30°.



6.2.2 向量的减法运算

1. B 【解析】易知 $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EO}+\overrightarrow{OF}=\overrightarrow{OF}-\overrightarrow{OE}$,只有选项 B 符合题意,故选 B.

2. D 【解析】在平行四边形 $ABCD$ 中,依题意得 $\overrightarrow{OC}=-\overrightarrow{OA}=-\boldsymbol{a}$,而 $\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$,所以 $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}=-\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$.故选 D.

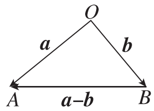
3. A 【解析】原式$=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{DE}$.故选 A.

4. C 【解析】因为$|\overrightarrow{BC}|=|\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}|$,所以$||\overrightarrow{AC}|-|\overrightarrow{AB}||\leqslant|\overrightarrow{BC}|\leqslant|\overrightarrow{AC}|+|\overrightarrow{AB}|$,即 $3\leqslant|\overrightarrow{BC}|\leqslant13$.故选 C.

5. C 【解析】由题图可知,$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}$.故选 C.

6. A 【解析】∵$\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{QC}$,∴$\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{QC}=\mathbf{0}$,∴$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AQ}=(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AP})+(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AQ})=\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{QC}=\mathbf{0}$.故选 A.

7. D 【解析】若 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为共线向量且方向相同,则$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|<|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$;若 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为共线向量且方向相反,则$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$.若 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 不共线,令 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OA}$,$\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OB}$,如图所示,连接 AB,则 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\overrightarrow{BA}$,∴$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|<|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$.故$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$.故选 D.



8. AC 【解析】对于 A,$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$,所以 A 正确;对于 B,$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB}$,所以 B 错误;对于 C,$\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AD}=\mathbf{0}$,所以 C 正确;对于 D,$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{AB}-(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DA})=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BA}=2\overrightarrow{AB}$,所以 D 错误.故选 AC.

9. ABC 【解析】由题可知 $AB=AC$ 且 $AB\perp AC$,则以 AB,AC 为邻边的平行四边形是正方形,其对角线相等,根据向量加、减法的运算法则可知$|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}|$,故 A 正确;$\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AC}$,$\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{AB}$,所以$|\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}|=|\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}|$,故 B 正确;$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AC}$,$\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}$,所以$|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CB}|=|\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BC}|$,故 C 正确;$|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{CB}|$,$|\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{BA}|$,$|\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{CA}|$,由条件可知$|\overrightarrow{CB}|<|\overrightarrow{BA}|+|\overrightarrow{CA}|$,即$|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}|<|\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AC}|+|\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{AB}|$,故 D 错误.故选 ABC.

10. $\overrightarrow{AB}$ 【解析】$(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB})+(\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{CD})=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}$.

11. $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$ 【解析】由题意,在平行四边形 $ABCD$ 中,∵$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$,$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$,∴$\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$,∴$\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BA}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$,∴$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CD}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$.

12. [3,15] [3,15] 【解析】因为$||\overrightarrow{AB}|-|\overrightarrow{AD}||\leqslant|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}|\leqslant|\overrightarrow{AB}|+|\overrightarrow{AD}|$,且$|\overrightarrow{AB}|=6$,$|\overrightarrow{AD}|=9$,所以 $3\leqslant|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}|\leqslant15$,所以$|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}|$的取值范围为[3,15].因为$||\overrightarrow{AB}|-|\overrightarrow{AD}||\leqslant|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}|\leqslant|\overrightarrow{AB}|+|\overrightarrow{AD}|$,且$|\overrightarrow{AB}|=6$,$|\overrightarrow{AD}|=9$,所以 $3\leqslant|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}|\leqslant15$,所以$|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}|$的取值范围为[3,15].

13. **解:**(1)$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}$.
(2)$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EA}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AD}=\mathbf{0}$.
(3)$(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB})-\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{CA}$.

14. **解:**∵四边形 $ACDE$ 为平行四边形,∴$\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AE}=\boldsymbol{c}$,$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}$,∴$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}$.

15. 直角 【解析】因为 $\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$,$\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$,且$|\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}|=|\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}|$,所以$|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}|$,所以以 AB,AC 为邻边的平行四边形的两条对角线的长度相等,所以该平行四边形为矩形,所以 $AB\perp AC$,所以$\triangle ABC$ 是直角三角形.

16. **证明:**因为$\triangle ABC$ 是等腰直角三角形,$\angle ACB=90°$,所以 $CA=CB$,又 M 是斜边 AB 的中点,所以 $CM=AM=BM$.
(1)因为 $\overrightarrow{CM}-\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{AM}$,且$|\overrightarrow{AM}|=|\overrightarrow{CM}|$,所以$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|$.
(2)因为 M 是斜边 AB 的中点,所以 $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MB}$,所以 $\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\overrightarrow{CM}+(\overrightarrow{CM}-\overrightarrow{CA})=\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{CB}$,又$|\overrightarrow{CB}|=|\overrightarrow{CA}|$,所以$|\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})|=|\boldsymbol{b}|$.

6.2.3 向量的数乘运算

1. D 【解析】由向量数乘的运算律,可得 $3(2\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b})=6\boldsymbol{a}-12\boldsymbol{b}$,故选 D.

2. C 【解析】设 BD 与 AC 交于点 O,则 $\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BO}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BD}$,故选 C.

3. B 【解析】①②显然正确;对于③,若 $m=0$,则无法得到 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$,故③错误;对于④,若 $\boldsymbol{a}=\mathbf{0}$,则无法得到 $m=n$,故④错误.

所以只有①②正确.故选 B.

4. A 【解析】∵ $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=-5\boldsymbol{a}+6\boldsymbol{b}+7\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{a}+4\boldsymbol{b}$，∴ $\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{AB}$，又 $\overrightarrow{BD}$ 与 $\overrightarrow{AB}$ 有公共点 B，∴ A,B,D 三点共线.故选 A.

5. A 【解析】$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}-\frac{1}{3}(\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA})=-\frac{1}{6}\overrightarrow{BA}-\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.故选 A.

6. C 【解析】连接 AD，∵在$\triangle PAD$中，PO是AD边上的中线，∴ $\overrightarrow{PO}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PD})$①，同理可得 $\overrightarrow{PO}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PE})$②，$\overrightarrow{PO}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PF})$③，①+②+③可得 $3\overrightarrow{PO}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}+\overrightarrow{PE}+\overrightarrow{PF})$，即 $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}+\overrightarrow{PE}+\overrightarrow{PF}=6\overrightarrow{PO}$，故选 C.

7. C 【解析】由 $AC=4AD$ 可得 $4\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$，所以 $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{AB}+4\mu\overrightarrow{AD}$，因为 P,B,D 三点共线，所以 $\lambda+4\mu=1$，故选 C.

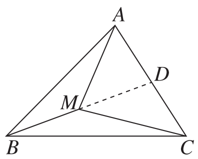
8. ABC 【解析】对于 A，$\boldsymbol{a}=-3\boldsymbol{e}$，$\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{e}$，可得 $\boldsymbol{b}=-\frac{2}{3}\boldsymbol{a}$，所以 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，故 A 符合题意；对于 B，$\boldsymbol{a}=-\frac{1}{3}\boldsymbol{e}$，$\boldsymbol{b}=\frac{2}{3}\boldsymbol{e}$，可得 $\boldsymbol{b}=-2\boldsymbol{a}$，所以 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，故 B 符合题意；对于 C，$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{b}=\frac{\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2}{2}-\boldsymbol{e}_1=-\frac{1}{2}\boldsymbol{e}_1+\frac{1}{2}\boldsymbol{e}_2$，可得 $\boldsymbol{b}=-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}$，所以 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，故 C 符合题意；对于 D，$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+\frac{\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2}{2}=\frac{3}{2}(\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2)$，只有当 $\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{0}$ 或 $\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{0}$ 时，才有 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，故 D 不符合题意.故选 ABC.

9. BCD 【解析】$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}=2\overrightarrow{EB}\neq\overrightarrow{CA}$，故 A 错误；因为点 G 为$\triangle ABC$的重心，所以 $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$，故 B 正确；$\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{CE}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA})=\boldsymbol{0}$，故 C 正确；连接 GD，因为 $\overrightarrow{GD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC})$，所以 $\overrightarrow{GA}=-2\overrightarrow{GD}=-2\times\frac{1}{2}(\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC})$，即 $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\boldsymbol{0}$，故 D 正确.故选 BCD.

10. 3 【解析】因为向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 不共线，所以由 $(y-2)\boldsymbol{a}+(x-1)\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$，得 $\begin{cases}y-2=0,\\x-1=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x=1,\\y=2,\end{cases}$ 所以 $x+y=3$.

11. 等腰梯形 【解析】由已知可得 $\overrightarrow{AB}=-\frac{3}{5}\overrightarrow{CD}$，所以 $\overrightarrow{AB}/\!/\overrightarrow{CD}$，且 $|\overrightarrow{AB}|\neq|\overrightarrow{CD}|$，又 $|\overrightarrow{AD}|=|\overrightarrow{BC}|$，所以四边形 $ABCD$ 为等腰梯形.

12. $\frac{3}{4}$ 【解析】如图，取 AC 的中点 D，连接 MD，因为 $\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{CM}$，所以 $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=-2\overrightarrow{MB}$，即 $2\overrightarrow{MD}=-2\overrightarrow{MB}$，可得 $\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{BM}$，所以点 M 为 BD 的中点，所以 $S_{\triangle MBC}=\frac{1}{2}S_{\triangle BCD}=\frac{1}{4}S_{\triangle ABC}=\frac{3}{4}$.



13. 解：(1)原式 $=\frac{2}{3}\boldsymbol{a}+\frac{2}{3}\boldsymbol{b}-\frac{3}{5}\boldsymbol{b}+\frac{3}{5}\boldsymbol{a}-\frac{1}{3}\boldsymbol{a}=\left(\frac{2}{3}\boldsymbol{a}+\frac{3}{5}\boldsymbol{a}-\frac{1}{3}\boldsymbol{a}\right)+\left(\frac{2}{3}\boldsymbol{b}-\frac{3}{5}\boldsymbol{b}\right)=\frac{14}{15}\boldsymbol{a}+\frac{1}{15}\boldsymbol{b}$.

(2) $\left(\frac{1}{3}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\right)-\left(\boldsymbol{a}-\frac{2}{3}\boldsymbol{b}\right)+2\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}=-\frac{5}{3}\boldsymbol{a}+\frac{5}{3}\boldsymbol{b}=-\frac{5}{3}(3\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j})+\frac{5}{3}(2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j})=-\frac{5}{3}\boldsymbol{i}-5\boldsymbol{j}$.

14. 解：(1)∵ $2\overrightarrow{OA}-3\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=2(2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})-3(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})+k\boldsymbol{a}+12\boldsymbol{b}=(1+k)\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$，且 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$，∴ $k=-1$.

(2)∵ A,B,C 三点共线，∴ $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}$ 共线，∴存在实数 λ，使 $\overrightarrow{BC}=\lambda\overrightarrow{AB}$，即 $\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}=\lambda(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})$，
∴ $(k-1)\boldsymbol{a}+10\boldsymbol{b}=\lambda(-\boldsymbol{a}+5\boldsymbol{b})$，又 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 不共线，
∴ $\begin{cases}k-1=-\lambda,\\10=5\lambda,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=-1,\\\lambda=2,\end{cases}$ 故 $k=-1$.

15. C 【解析】由题意知，$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$.由$\triangle OEF\backsim\triangle OBC$，得 $\frac{OE}{OB}=\frac{OF}{OC}=\frac{EF}{BC}=\frac{1}{3}$，所以 $\overrightarrow{OE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OF}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OC}$.在$\triangle OED$中，$\overrightarrow{OF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OE}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OD}$，即 $\frac{1}{3}\overrightarrow{OC}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OD}=\frac{1}{6}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OD}$，即 $\frac{1}{3}(\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})=\frac{1}{6}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OD}$，整理得 $\overrightarrow{OD}=-2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$.故选 C.

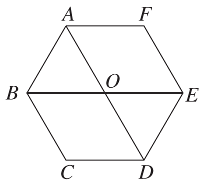
16. 解：(1) $\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{OD}$.理由如下：∵ D 为 BC 的中点，∴ $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=2\overrightarrow{OD}$，
又 $2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{0}$，∴ $2\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OD}=\boldsymbol{0}$，∴ $\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{OD}$.

(2)由题意得 $\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}+3\overrightarrow{OC}=(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC})+2(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})=2\overrightarrow{OE}+4\overrightarrow{OD}=\boldsymbol{0}$，∴ $\overrightarrow{OE}=2\overrightarrow{DO}$，∴ $DE=3DO$，又 $AB=2DE$，∴ $AB=6DO$，∴ $S_{\triangle ABC}=6S_{\triangle BOC}=12$，即$\triangle ABC$的面积为 12.

6.2.4 向量的数量积

第 1 课时 向量数量积的定义、投影向量

1. B 【解析】如图，连接 BE，设 AD 与 BE 交于点 O，由正六边形的性质可知$\triangle AOB$为等边三角形，所以 $\angle OAB=\frac{\pi}{3}$，则向量 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{AD}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$.故选 B.



2. C 【解析】在$\triangle ABC$中，∵ $\angle ABC=60°$，∴ $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{BC}$ 的夹角为 $120°$，则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{BC}|\cos\langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\rangle=3\times4\times\cos 120°=-6$.故选 C.

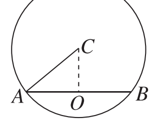
3. B 【解析】A 中说法显然正确；当 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 都是非零向量，且 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$ 时，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$ 也成立，故 B 中说法错误；若 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 都是非零向量，则 $|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|=||\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle|\leqslant|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$，若 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ 或 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$，则 $|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|=0$，故 C 中说法正确；当 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 都是非零向量，且共线时，$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=0$ 或 $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\pi$，则 $\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\pm1$，所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\pm|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$，当 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ 或 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$ 时，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|=0$，也满足 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\pm|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$，故 D 中说法正确.故选 B.

4. B 【解析】设向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ，$\theta\in[0,\pi]$，则 $\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{-6}{3\times4}=-\frac{1}{2}$，所以 $\theta=\frac{2\pi}{3}$.故选 B.

5. B 【解析】若 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}>0$，则 $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}<0$，所以 $\cos B<0$，又因为 $B\in(0,\pi)$，所以 B 为钝角，$\triangle ABC$ 为钝角三角形，必要性成立；若$\triangle ABC$为钝角三角形，则 B 不一定为钝角，无法推出 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}>0$，充分性不成立.故“$\triangle ABC$为钝角三角形”是“$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}>0$”的必要不充分条件.故选 B.

6. C 【解析】由 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AO}$，可知点 O 为 BC 的中点，又 O 是$\triangle ABC$的外心，所以 $AB\perp AC$，又 $|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{AB}|$，所以$\triangle OAB$为等边三角形，则 $\angle ABC=60°$，则 $\cos\langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\rangle=120°$，所以向量 $\overrightarrow{AB}$ 在向量 $\overrightarrow{BC}$ 上的投影向量为 $|\overrightarrow{AB}|\times\cos 120°\times\frac{\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BC}|}=\frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)\overrightarrow{BC}=-\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$.故选 C.

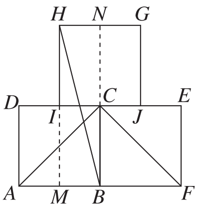
7. C 【解析】如图所示，过点 C 作 $OC\perp AB$ 交 AB 于点 O，则 O 是 AB 的中点，所以 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{AB}|\cos\angle CAB=|\overrightarrow{AO}||\overrightarrow{AB}|=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|^2=2$，所以 $|\overrightarrow{AB}|=2$.故选 C.



8. ACD 【解析】$\boldsymbol{e}_1$ 在 $\boldsymbol{e}_2$ 上的投影向量为 $|\boldsymbol{e}_1|\cdot\cos\theta\,\boldsymbol{e}_2=\cos\theta\,\boldsymbol{e}_2$，故 A 正确；$\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2=|\boldsymbol{e}_1||\boldsymbol{e}_2|\cos\theta=\cos\theta$，故 B 不正确；$\boldsymbol{e}_1^2=|\boldsymbol{e}_1|^2$，$\boldsymbol{e}_2^2=|\boldsymbol{e}_2|^2$，且 $|\boldsymbol{e}_1|^2=|\boldsymbol{e}_2|^2=1$，故 C 正确；由题知以向量 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 为邻边的平行四边形为菱形，其两条对角

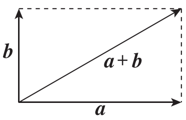
线互相垂直，所以$(\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2)\perp(\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2)$，故D正确.故选ACD.

9. ABD 【解析】对于A，由题意可知$\angle ACB=\angle FCB=\frac{\pi}{4}$，则$\angle ACF=\frac{\pi}{2}$，所以$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CF}=0$，故A正确；对于B，如图，设$M,N$分别为$AB,HG$的中点，连接$IM,CN$，则$\overrightarrow{HB}$在$\overrightarrow{AB}$上的投影向量为$\overrightarrow{MB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$，故B正确；对于C，因为$\overrightarrow{FA}$与$\overrightarrow{AC}$的夹角为$\frac{3\pi}{4}$，所以$\overrightarrow{FA}\cdot\overrightarrow{AC}<0$，故C错误；对于D，$\overrightarrow{HB}$在$\overrightarrow{CB}$上的投影向量为$\overrightarrow{NB}=2\overrightarrow{CB}$，故D正确.故选ABD.



10. -12 【解析】由题意得$|\boldsymbol{b}|=3|\boldsymbol{a}|=6$，且$\boldsymbol{b}$与$\boldsymbol{a}$反向，$\therefore\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=180^\circ$，$\therefore\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos180^\circ=2\times6\times(-1)=-12$.

11. $\sqrt{3}$ 【解析】因为$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，所以根据向量加法的平行四边形法则可得向量$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$如图所示，又因为向量$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$与$\boldsymbol{a}$的夹角为$30^\circ$，所以$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{3}|\boldsymbol{b}|=\sqrt{3}$.



12. $(-2,4)$ 【解析】$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{AP}||\overrightarrow{AB}|\cos\angle BAP$，所以当点$P$与点$B$重合时，$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}=4$，当点$P$与点$D$重合时，$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}=-2$，又$P$是菱形$ABCD$内一点(不包括边界)，所以$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}$的取值范围是$(-2,4)$.

13. **解**：(1)在平行四边形$ABCD$中，$|\overrightarrow{AB}|=4$，$|\overrightarrow{AD}|=3$，$\angle DAB=60^\circ$，$\because\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$，$\therefore\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}^2=9$.

(2)$\because\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{CD}$，$\therefore\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=-\overrightarrow{AB}^2=-16$.

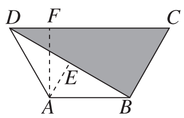
(3)$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AD}|\cos\angle DAB=4\times3\times\frac{1}{2}=6$.

(4)$\because\overrightarrow{CD}=-\overrightarrow{AB}$，$\therefore\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CD}=-\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}=-|\overrightarrow{AD}||\overrightarrow{AB}|\cos\angle DAB=-3\times4\times\cos60^\circ=-6$.

14. **解**：由已知得$|\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$，$\boldsymbol{c}=-\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，$\therefore$向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$同向，而向量$\boldsymbol{c}$与它们反向，$\therefore\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=3\cos0^\circ+4\cos180^\circ+12\cos180^\circ=3-4-12=-13$.

15. B 【解析】因为$\theta\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$，所以$\frac{\sqrt{2}}{2}<\cos\theta<1$，而$\boldsymbol{b}\circ\boldsymbol{a}=\frac{\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}=\frac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}\cos\theta$，且$|\boldsymbol{a}|\geqslant|\boldsymbol{b}|>0$，可得$0<\frac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}\cos\theta<1$，又因为$\boldsymbol{b}\circ\boldsymbol{a}$在集合$\left\{\frac{n}{2}\middle|n\in\mathbf{Z}\right\}$中，所以$\frac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}\cos\theta=\frac{1}{2}$，即$\frac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{1}{2\cos\theta}$，所以$\boldsymbol{a}\circ\boldsymbol{b}=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}}=\frac{|\boldsymbol{a}|}{|\boldsymbol{b}|}\cos\theta=2\cos^2\theta$，又因为$\frac{1}{2}<\cos^2\theta<1$，所以$1<\boldsymbol{a}\circ\boldsymbol{b}<2$，又因为$\boldsymbol{a}\circ\boldsymbol{b}$也在集合$\left\{\frac{n}{2}\middle|n\in\mathbf{Z}\right\}$中，所以$\boldsymbol{a}\circ\boldsymbol{b}=\frac{3}{2}$，所以$\boldsymbol{a}\circ\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\circ\boldsymbol{a}=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}=2$.故选B.

16. **解**：如图，作$AF\perp CD$，垂足为F，记BD的中点为E，连接AE，则$AE\perp BD$.



由$DA=AB=BC=\frac{1}{2}CD=1$可知，梯形$ABCD$为等腰梯形，$DF=\frac{1}{2}$，

所以$\angle ADF=60^\circ$，$\angle DAF=30^\circ$，则$\angle DAB=120^\circ$，

所以$\angle ABD=\angle ADB=30^\circ$，$\angle CBD=90^\circ$，

所以$BD=2\times1\times\cos30^\circ=\sqrt{3}$.

由图可知，当点P在线段BC上时，$\overrightarrow{AP}$在$\overrightarrow{BD}$上的投影向量为$\overrightarrow{EB}$，此时$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BD}$取得最小值，最小值为$\overrightarrow{EB}\cdot\overrightarrow{BD}$；当点$P$与点$D$重合时，$\overrightarrow{AP}$在$\overrightarrow{BD}$上的投影向量为$\overrightarrow{ED}$，此时$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BD}$取得最大值，最大值为$\overrightarrow{ED}\cdot\overrightarrow{BD}$.

综上所述，$\overrightarrow{EB}\cdot\overrightarrow{BD}\leqslant\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BD}\leqslant\overrightarrow{ED}\cdot\overrightarrow{BD}$，

即$-\frac{3}{2}\leqslant\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BD}\leqslant\frac{3}{2}$.

第2课时 向量数量积的运算律

1. B 【解析】设$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角为θ，则$\cos\theta=-\frac{1}{3}$，又$|\boldsymbol{a}|=2$，$|\boldsymbol{b}|=3$，所以$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos\theta=2\times3\times\left(-\frac{1}{3}\right)=-2$，所以$(2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+3\boldsymbol{b}^2=-4+27=23$.故选B.

2. B 【解析】$\because(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\perp(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$，$\therefore(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=0$，$\therefore|\boldsymbol{a}|^2-|\boldsymbol{b}|^2=0$，$\therefore|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$.

3. C 【解析】因为$|\boldsymbol{a}|=1$，$|\boldsymbol{b}|=2$，向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角为60°，所以$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos60^\circ=1$，所以$|4\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{(4\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2}=\sqrt{16|\boldsymbol{a}|^2-8\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+|\boldsymbol{b}|^2}=\sqrt{16-8+4}=2\sqrt{3}$.故选C.

4. D 【解析】因为$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$均为单位向量，且$2\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{b}+4\boldsymbol{c}$，所以$2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}=4\boldsymbol{c}$，两边平方得$4\boldsymbol{a}^2-12\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+9\boldsymbol{b}^2=16\boldsymbol{c}^2$，则$4-12\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle+9=16$，解得$\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=-\frac{1}{4}$，即$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角的余弦值为$-\frac{1}{4}$.故选D.

5. B 【解析】$\because D$是BC的中点，$\therefore\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$，又$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$，$\therefore\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}=\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}^2+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}^2$.$\because|\overrightarrow{AB}|=2$，$\therefore\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|^2=2$，故选B.

6. C 【解析】由题意得$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{\boldsymbol{a}^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2}=\sqrt{1^2-2\times1\times\sqrt{2}\cos\theta+(\sqrt{2})^2}=1$，解得$\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$，因为$\theta\in[0,\pi]$，所以$\sin\theta=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以$\boldsymbol{a}\oplus\boldsymbol{b}=\left|\frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{a}+\frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{b}\right|=\sqrt{\frac{1}{2}\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}^2}=\sqrt{\frac{1}{2}+1+\frac{1}{2}\times2}=\frac{\sqrt{10}}{2}$.故选C.

7. B 【解析】由题意知$(2t\boldsymbol{e}_1+7\boldsymbol{e}_2)\cdot(\boldsymbol{e}_1+t\boldsymbol{e}_2)<0$，即$2t^2+15t+7<0$，解得$-7<t<-\frac{1}{2}$.由$2t\cdot t-7\neq0$，得$t\neq\pm\frac{\sqrt{14}}{2}$，所以$t$的取值范围为$\left(-7,-\frac{\sqrt{14}}{2}\right)\cup\left(-\frac{\sqrt{14}}{2},-\frac{1}{2}\right)$.故选B.

8. AC 【解析】由题意，向量$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$均为单位向量，且$|\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{a}|=\sqrt{5}$，则$|\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{a}|^2=(\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{a})^2=\boldsymbol{b}^2-4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+4\boldsymbol{a}^2=1-4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+4=5$，解得$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，所以$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，故A正确，D错误；$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{\boldsymbol{a}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2}=\sqrt{1+0+1}=\sqrt{2}$，故B错误；$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{\boldsymbol{a}^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2}=\sqrt{1-0+1}=\sqrt{2}$，故C正确.故选AC.

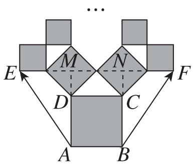
9. ACD 【解析】对于A，若$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=0$，则$|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta=0$，而$|\boldsymbol{a}|\neq0$，$|\boldsymbol{b}|\neq0$，因此$\sin\theta=0$，又$0\leqslant\theta\leqslant\pi$，所以$\theta=0$或$\theta=\pi$，所以$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，A正确；对于B，$\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=\lambda|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta$，当$\lambda<0$时，$(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=|\lambda\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin(\pi-\theta)=-\lambda|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta$，当$0<\theta<\pi$时，$\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\neq(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}$，B错误；对于C，平行四边形$ABCD$的面积$S=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AD}|\sin\angle BAD=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}$，C正确；对于D，由$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\sqrt{3}$，得$|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta=\sqrt{3}$，由$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1$，得$|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta=1$，两式平方后相加得$(|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|)^2=4$，所以$|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|=2$，则$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}=\sqrt{\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2+2}\geqslant\sqrt{2|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|+2}=\sqrt{6}$，当且仅当$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=\sqrt{2}$时取等号，D正确.故选ACD.

10. 1 【解析】因为$|\boldsymbol{a}|=1$，$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{2}$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1$，所以$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2}=\sqrt{\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}=\sqrt{1^2+(\sqrt{2})^2-2\times1}=1$.

11. $\frac{2\pi}{3}$ 【解析】由$(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\cdot(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=1$，得$2\boldsymbol{a}^2+3\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{b}^2=1$，因为$|\boldsymbol{a}|=3$，$|\boldsymbol{b}|=2$，所以$18+3\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-8=1$，解得$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-3$.设$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角为$\theta$，则$\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=$

$\frac{-3}{3\times2}=-\frac{1}{2}$,因为 $\theta\in[0,\pi]$,所以 $\theta=\frac{2\pi}{3}$.

12. 5 【解析】如图,连接 EF,延长 AD 交 EF 于点 M,延长 BC 交 EF 于点 N.由题意和图形的对称性,可知 $AM\perp EF$,$BN\perp EF$,且 $AM=BN=2+\frac{1}{2}\times2=3$,$ME=NF=2\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+2\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=2$,所以 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BF}=(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{ME})\cdot(\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{NF})=\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{NF}+\overrightarrow{ME}\cdot\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{ME}\cdot\overrightarrow{NF}=\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{ME}\cdot\overrightarrow{NF}=|\overrightarrow{AM}|\cdot|\overrightarrow{BN}|\cos0+|\overrightarrow{ME}|\cdot|\overrightarrow{NF}|\cos\pi=9-4=5$.



13. **解:**(1)因为 $|\boldsymbol{a}|=2$,$|\boldsymbol{b}|=3$,$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $\frac{2\pi}{3}$,所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos\frac{2\pi}{3}=2\times3\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-3$,

所以 $(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})=6\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{b}^2=6\times2^2-(-3)-2\times3^2=9$.

(2)因为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不共线,所以若 $(\boldsymbol{a}-n\boldsymbol{b})\parallel(2\boldsymbol{a}+6\boldsymbol{b})$,则存在唯一实数 t,使得 $\boldsymbol{a}-n\boldsymbol{b}=t(2\boldsymbol{a}+6\boldsymbol{b})$,

可得 $\begin{cases}1=2t,\\-n=6t,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}t=\frac{1}{2},\\n=-3.\end{cases}$

因为 $(m\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\perp(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})$,所以 $(m\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})=0$,

即 $m\boldsymbol{a}^2+(2m+1)\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{b}^2=0$,即 $m\times2^2+(2m+1)\times(-3)+2\times3^2=0$,解得 $m=\frac{15}{2}$,

所以 $m-n=\frac{15}{2}-(-3)=\frac{21}{2}$.

14. **解:**(1)$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AF}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}=-\frac{1}{3}\boldsymbol{a}+\frac{1}{6}\boldsymbol{b}$.

(2)设 $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AC}$,$\lambda\in(0,1)$,则 $\overrightarrow{EP}=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{EA}+\lambda\overrightarrow{AC}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{AC}=-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$,因为 $\overrightarrow{EF}$ 与 $\overrightarrow{EP}$ 共线,所以可设 $\overrightarrow{EF}=k\overrightarrow{EP}$,$k\in(0,1)$,

则 $-\frac{1}{3}\boldsymbol{a}+\frac{1}{6}\boldsymbol{b}=k\left(-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}\right)$,即 $\left(\frac{k}{2}-\frac{1}{3}\right)\boldsymbol{a}+\left(\frac{1}{6}-\lambda k\right)\boldsymbol{b}=0$,则 $\begin{cases}\frac{k}{2}-\frac{1}{3}=0,\\\frac{1}{6}-\lambda k=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=\frac{2}{3},\\\lambda=\frac{1}{4},\end{cases}$ 即 $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$,则 $\overrightarrow{DP}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}-\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC})-\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}=-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-\frac{1}{4}\boldsymbol{b}$,故 $\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{DP}=\left(-\frac{1}{3}\boldsymbol{a}+\frac{1}{6}\boldsymbol{b}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-\frac{1}{4}\boldsymbol{b}\right)=\frac{1}{6}\boldsymbol{a}^2+\frac{1}{12}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-\frac{1}{12}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-\frac{1}{24}\boldsymbol{b}^2=\frac{1}{6}\boldsymbol{a}^2-\frac{1}{24}\boldsymbol{b}^2=\frac{1}{6}\times4^2-\frac{1}{24}\times4^2=2$.

15. A 【解析】$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}|=\sqrt{(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})^2}=\sqrt{|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2+|\boldsymbol{c}|^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})}=\sqrt{1+4+9+\frac{5}{4}+2\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})}$,因为 $\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\leqslant|\boldsymbol{c}||\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=3\times\sqrt{|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}=3\times\sqrt{1+4+\frac{5}{4}}=\frac{15}{2}$,当且仅当 $\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 同向时取等号,所以 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}|\leqslant\sqrt{1+4+9+\frac{5}{4}+2\times\frac{15}{2}}=\sqrt{\frac{121}{4}}=\frac{11}{2}$.故选 A.

16. **解:**(1)$\because\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=4\boldsymbol{e}_1+5\boldsymbol{e}_2-(2\boldsymbol{e}_1+3\boldsymbol{e}_2)=2\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2$,$\therefore|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(2\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2)^2}=2\times\sqrt{1^2+2\times1\times1\times\frac{1}{2}+1^2}=2\sqrt{3}$.

(2)假设在 y' 轴上存在一点 C,使得 $\triangle ABC$ 是以 AB 为斜边的直角三角形.设 $\overrightarrow{OC}=t\boldsymbol{e}_2$,则 $\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC}=2\boldsymbol{e}_1+3\boldsymbol{e}_2-t\boldsymbol{e}_2=2\boldsymbol{e}_1+(3-t)\boldsymbol{e}_2$,$\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}=(4\boldsymbol{e}_1+5\boldsymbol{e}_2)-t\boldsymbol{e}_2=4\boldsymbol{e}_1+(5-t)\boldsymbol{e}_2$,根据题意得 $\overrightarrow{CA}\perp\overrightarrow{CB}$,$\therefore\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=0$,$\therefore[2\boldsymbol{e}_1+(3-t)\boldsymbol{e}_2]\cdot[4\boldsymbol{e}_1+(5-t)\boldsymbol{e}_2]=0$,得 $8+(3-t)(5-t)+[2(5-t)+4(3-t)]\times1\times1\times\frac{1}{2}=0$,整理得 $t^2-11t+34=0$,$\because\Delta<0$,$\therefore$ 方程无解.故在 y' 轴上不存在一点 C,使得 $\triangle ABC$ 是以 AB 为斜边的直角三角形.

滚动习题(一)

1. A 【解析】$\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}$,故选 A.

2. D 【解析】因为 $|\boldsymbol{a}|=2\sqrt{3}|\boldsymbol{b}|$,$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{5\pi}{6}$,所以 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 上的投影向量为 $|\boldsymbol{a}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle\cdot\frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}=\frac{|\boldsymbol{a}|}{|\boldsymbol{b}|}\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle\cdot\boldsymbol{b}=2\sqrt{3}\cos\frac{5\pi}{6}\cdot\boldsymbol{b}=-3\boldsymbol{b}$.故选 D.

3. A 【解析】$\because\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 不共线,$\therefore\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2\neq\boldsymbol{0}$,又 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$,$\therefore$ 存在实数 λ,使 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$,即 $k\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2=2\lambda\boldsymbol{e}_1-\lambda\boldsymbol{e}_2$,$\therefore\begin{cases}k=2\lambda,\\1=-\lambda,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=-2,\\\lambda=-1,\end{cases}$ 故选 A.

4. A 【解析】由题意知 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 为非零向量,当 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$ 时,可得 $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=0$,充分性成立;当 $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=0$ 时,可得 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$ 或 $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{c}$,必要性不成立.所以"$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$"是"$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=0$"的充分不必要条件.故选 A.

5. D 【解析】$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{CE}-\overrightarrow{CD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}=\frac{2}{3}(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$.故选 D.

6. C 【解析】$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{AB}|\cdot(|\overrightarrow{AP}|\cos\angle PAB)$.由题图可得,当 P 为半圆弧 BC 的中点时,$|\overrightarrow{AP}|\cos\angle PAB$ 取得最大值 3,此时 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{AB}|\cdot(|\overrightarrow{AP}|\cos\angle PAB)=2\times3=6$;当 P 与 C 点或 B 点重合时,$|\overrightarrow{AP}|\cos\angle PAB$ 取得最小值 2,此时 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{AB}|\cdot(|\overrightarrow{AP}|\cos\angle PAB)=2\times2=4$.综上,$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}$ 的取值范围是 $[4,6]$.故选 C.

7. AB 【解析】对于 A,若 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的夹角为钝角,则 $\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle<0$,所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle<0$,A 正确;对于 B,当 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$ 时,以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形是矩形,所以 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$,B 正确;对于 C,当 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 同向共线时,有 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}>0$,C 错误;对于 D,$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=3\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}$,所以 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$ 反向,D 错误.故选 AB.

8. ACD 【解析】对于 A,设 BC 的中点为 D,连接 AD,若 $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=\frac{1}{3}\times2\overrightarrow{AD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$,则点 M 是 $\triangle ABC$ 的重心,故 A 正确;对于 B,连接 BM,若 $\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$,则有 $\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$,即 $\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{CB}$,则点 M 在 CB 的延长线上,故 B 错误;对于 C,延长 AM 交 BC 于点 N,若 $2\overrightarrow{AM}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$,且 $x+y=1$,则可得 M 为 AN 的中点,则 $\triangle MBC$ 的面积是 $\triangle ABC$ 面积的 $\frac{1}{2}$,故 C 正确;对于 D,因为 $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MC}$,所以 $\overrightarrow{MA}\cdot(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB})=\overrightarrow{MA}\cdot(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC})$,即 $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{AC}$,所以 $|\overrightarrow{MA}||\overrightarrow{AB}|\cos(\pi-\angle BAM)=|\overrightarrow{MA}||\overrightarrow{AC}|\cos(\pi-\angle CAM)$,即 $|\overrightarrow{MA}||\overrightarrow{AB}|\cos\angle BAM=|\overrightarrow{MA}||\overrightarrow{AC}|\cos\angle CAM$,又 $\overrightarrow{AM}=\lambda\left(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}+\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}\right)$,所以点 M 在 $\angle BAC$ 的平分线上,所以 $\angle BAM=\angle CAM$,所以 $\cos\angle BAM=\cos\angle CAM$,所以 $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AC}|$,所以 $\triangle ABC$ 为等腰三角形,故 D 正确.故选 ACD.

9. $\sqrt{65}$ 【解析】由已知得 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\frac{3\pi}{4}=3\times2\sqrt{2}\times\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-6$,所以 $|\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}|=\sqrt{(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})^2}=\sqrt{\boldsymbol{a}^2-4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+4\boldsymbol{b}^2}=\sqrt{9-4\times(-6)+4\times8}=\sqrt{65}$.

10. 梯形 【解析】因为 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$,$\overrightarrow{BC}=-4\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$,$\overrightarrow{CD}=-5\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$,所以 $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})+(-4\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})+(-5\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})=-8\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$,所以 $\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{BC}$,所以 $AD\parallel BC$ 且 $|\overrightarrow{AD}|\neq|\overrightarrow{BC}|$,所以四边形 $ABCD$ 为梯形.

11. -2 【解析】$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AD}+2\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}+2(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})=3\overrightarrow{AD}-2\overrightarrow{AB}$,因此,$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=(3\overrightarrow{AD}-2\overrightarrow{AB})\cdot\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AB}^2=-2$.

12. $[6,2\sqrt{10}]$ 【解析】设 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $\theta(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$,则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta=3\cos\theta$,令 $y=|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|+|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2}+\sqrt{|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2}=\sqrt{|\boldsymbol{a}|^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+|\boldsymbol{b}|^2}+\sqrt{|\boldsymbol{a}|^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+|\boldsymbol{b}|^2}=\sqrt{10+6\cos\theta}+\sqrt{10-6\cos\theta}$,则有 $y^2=(\sqrt{10+6\cos\theta}+\sqrt{10-6\cos\theta})^2=20+2\sqrt{10+6\cos\theta}\cdot\sqrt{10-6\cos\theta}=20+2\sqrt{100-36\cos^2\theta}$,又 $0\leqslant\cos^2\theta\leqslant1$,所以 $8\leqslant\sqrt{100-36\cos^2\theta}\leqslant10$,所以 $y^2=20+2\sqrt{100-36\cos^2\theta}\in[36,40]$,则 $y\in[6,2\sqrt{10}]$,即 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|+|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$ 的取值范围是 $[6,2\sqrt{10}]$.

13. 解:(1)$\because(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{b}^2=-6$,
$\therefore\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}^2-2\boldsymbol{b}^2+6=1-8+6=-1$.

(2)$\because\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot\cos\theta=-1$,$\therefore\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|}=\frac{-1}{1\times2}=-\frac{1}{2}$,又 $\theta\in[0,\pi]$,$\therefore\theta=\frac{2\pi}{3}$.

(3)$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{\boldsymbol{a}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2}=\sqrt{1-2+4}=\sqrt{3}$.

14. 解:(1)因为点 P 在 BF 上,所以设 $\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AF}+(1-x)\overrightarrow{AB}=\frac{x}{2}\overrightarrow{AD}+(1-x)\overrightarrow{AB}$,

又因为 $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AD}+\frac{2}{3}\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AD}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{AP}$ 与 $\overrightarrow{AE}$ 共线,

所以 $\frac{x}{2}=\frac{1-x}{\frac{2}{3}}$,解得 $x=\frac{3}{4}$,所以 $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{8}\overrightarrow{AD}$.

(2)由(1)可得 $\overrightarrow{AP}=\frac{3}{8}\overrightarrow{AE}$,则 $\frac{AP}{AE}=\frac{3}{8}$,所以 $\frac{AP}{PE}=\frac{3}{5}$.

由(1)可得 $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AF}$,即 $\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\right)\overrightarrow{AP}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AF}$,即 $\frac{3}{4}(\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AF})=\frac{1}{4}(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AP})$,

即 $\frac{3}{4}\overrightarrow{FP}=\frac{1}{4}\overrightarrow{PB}$,可得 $\overrightarrow{BP}=3\overrightarrow{PF}$,所以 $\frac{BP}{PF}=3$,

所以 $\frac{S_1}{S_2}=\frac{S_{\triangle BPE}}{S_{\triangle APF}}=\frac{BP\cdot PE}{PF\cdot AP}=5$.

15. 解:(1)根据题意得 $\frac{DB}{DC}=\frac{AB}{AC}=3$,所以 $BD=\frac{3}{4}BC$.

因为 $\overrightarrow{AE}=x\overrightarrow{AB}(0<x<1)$,$\overrightarrow{AF}=y\overrightarrow{AC}(y>0)$,

所以 $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{4x}\overrightarrow{AE}+\frac{3}{4y}\overrightarrow{AF}$,

又 E,D,F 三点共线,所以 $\frac{1}{4x}+\frac{3}{4y}=1$,所以 $\frac{1}{x}+\frac{3}{y}=4$.

(2)$\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{BC}=(\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AE})\cdot(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=(y\overrightarrow{AC}-x\overrightarrow{AB})\cdot(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=y\overrightarrow{AC}^2+x\overrightarrow{AB}^2-(x+y)\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=9x+y-(x+y)|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cos\angle BAC=\frac{21}{2}x+\frac{5}{2}y=\left(\frac{21}{2}x+\frac{5}{2}y\right)\left(\frac{1}{4x}+\frac{3}{4y}\right)=\frac{9}{2}+\frac{1}{8}\left(\frac{63x}{y}+\frac{5y}{x}\right)\geqslant\frac{9}{2}+\frac{3}{4}\sqrt{35}$,

当且仅当 $\frac{63x}{y}=\frac{5y}{x}$ 时取等号,所以 $\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{BC}$ 的最小值为 $\frac{9}{2}+\frac{3}{4}\sqrt{35}$.

6.3 平面向量基本定理及坐标表示

6.3.1 平面向量基本定理

1. B 【解析】由题图可知,$\overrightarrow{OA}$ 与 $\overrightarrow{BC}$ 共线,$\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{CF}$ 共线,$\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{DE}$ 共线,均不能构成一个基底,$\overrightarrow{OA}$ 与 $\overrightarrow{CD}$ 不共线,能构成一个基底. 故选 B.

2. C 【解析】由题图易知 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{e}_1-3\boldsymbol{e}_2$. 故选 C.

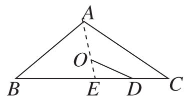
3. A 【解析】$\overrightarrow{OC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA})=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DC})=\frac{1}{2}(5\boldsymbol{e}_1+3\boldsymbol{e}_2)$.

4. A 【解析】因为 $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{AB}$,所以 $\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}=t\overrightarrow{AB}$,所以 $\overrightarrow{AP}=t\overrightarrow{AB}$,所以 $\overrightarrow{AP}$,$\overrightarrow{AB}$ 共线. 因为 $0<t<1$,$\overrightarrow{AP}$,$\overrightarrow{AB}$ 有公共点 A,所以点 P 在线段 AB 上,且不包括端点,故选 A.

5. B 【解析】$\because\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2+2\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2=3\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2$,$\therefore\boldsymbol{c}=6\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2=2(3\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2)=2(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$,$\therefore\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 共线,故选 B.

6. B 【解析】由题可得 $\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{FC}+\overrightarrow{CE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\frac{2}{3}\overrightarrow{CD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\frac{2}{3}(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD})=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\frac{2}{3}\left(-\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}\right)=\frac{2}{3}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{18}\overrightarrow{BC}$. 故选 B.

7. C 【解析】如图所示,连接 AO 并延长,交 BC 于点 E,因为 O 为 $\triangle ABC$ 的重心,所以 E 为 BC 的中点,且 $\overrightarrow{AO}=2\overrightarrow{OE}$,所以 $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$,又由 $\overrightarrow{BC}=4\overrightarrow{DC}$,可得 $\overrightarrow{ED}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$,所以 $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{ED}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AE}+\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})+\frac{1}{4}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=-\frac{1}{12}\overrightarrow{AB}+\frac{5}{12}\overrightarrow{AC}$. 因为 $\overrightarrow{OD}=m\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{AC}$,所以 $m=-\frac{1}{12}$,$n=\frac{5}{12}$,所以 $\frac{m}{n}=-\frac{1}{5}$. 故选 C.



8. ABD 【解析】对于 A,根据平面向量基底的定义可知,$\boldsymbol{e}_1$,$\boldsymbol{e}_2$ 不共线,所以 $\boldsymbol{e}_1$,$\boldsymbol{e}_2$ 一定都是非零向量,A 正确;对于 B,因为 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}=\lambda_1\boldsymbol{e}_1+\lambda_2\boldsymbol{e}_2$,且 $\boldsymbol{e}_1$,$\boldsymbol{e}_2$ 不共线,所以 $\lambda_1=\lambda_2=0$,B 正确;对于 C,平面内不共线的两个向量都可以构成一个基底,C 错误;对于 D,$\boldsymbol{e}_1$ 在 $\boldsymbol{e}_2$ 上的投影向量为 $|\boldsymbol{e}_1|\cdot\cos\frac{3\pi}{4}\cdot\frac{\boldsymbol{e}_2}{|\boldsymbol{e}_2|}=-\frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{e}_2$,D 正确. 故选 ABD.

9. BC 【解析】由题意得 $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$,故 D 错误;$\overrightarrow{QP}=\overrightarrow{BP}-\overrightarrow{BQ}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BA}-\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}=-\frac{3}{4}\boldsymbol{a}-\frac{1}{4}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})=-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-\frac{1}{4}\boldsymbol{b}$,故 A 错误;$\overrightarrow{QR}=\overrightarrow{CR}-\overrightarrow{CQ}=-\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}+\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}=-\frac{1}{4}\boldsymbol{b}+\frac{3}{4}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})=-\frac{3}{4}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$,故 B 正确;$\overrightarrow{PR}=\overrightarrow{AR}-\overrightarrow{AP}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}=-\frac{1}{4}\boldsymbol{a}+\frac{3}{4}\boldsymbol{b}$,故 C 正确. 故选 BC.

10. $\lambda\neq-\frac{1}{2}$ 【解析】当 $(\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2)\parallel(\lambda\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2)$ 时,则存在唯一实数 t,使得 $\lambda\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2=t(\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2)$,所以 $\begin{cases}\lambda=t,\\1=-2t,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}\lambda=-\frac{1}{2},\\t=-\frac{1}{2}\end{cases}$. 因为 $\{\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2,\lambda\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2\}$ 是一个基底,所以 $\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2$,$\lambda\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$ 不共线,所以 $\lambda\neq-\frac{1}{2}$.

11. $\frac{1}{2}$ 【解析】因为 $\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{DC}$,所以 $\overrightarrow{DA}=2\lambda\overrightarrow{DB}+$

$3\overrightarrow{CB}=2\lambda\overrightarrow{DB}+3(\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{DC})=(2\lambda+3)\overrightarrow{DB}-3\overrightarrow{DC}$，又 A，B，C 三点共线，所以 $2\lambda+3-3=1$，解得 $\lambda=\frac{1}{2}$.

12. 8 【解析】根据题意，在平行四边形 $ABCD$ 中，$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$，又 $|\overrightarrow{AB}|=2$，$\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}+\frac{2\overrightarrow{AD}}{|\overrightarrow{AD}|}=\frac{\sqrt{5}\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}$，所以 $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{|\overrightarrow{AD}|}\overrightarrow{AD}=\frac{\sqrt{5}}{|\overrightarrow{AC}|}\overrightarrow{AC}$，则 $\frac{2}{|\overrightarrow{AD}|}=\frac{1}{2}$，$\frac{\sqrt{5}}{|\overrightarrow{AC}|}=\frac{1}{2}$，所以 $|\overrightarrow{AD}|=4$，$|\overrightarrow{AC}|=2\sqrt{5}$，则 $|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{AD}|^2=|\overrightarrow{AC}|^2$，所以 $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AD}$，所以平行四边形 $ABCD$ 的面积 $S=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AD}|=8$.

13. **解**：(1)证明：若 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 共线，则存在 $k\in\mathbf{R}$，使 $\boldsymbol{a}=k\boldsymbol{b}$，即 $\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2=k(\boldsymbol{e}_1+3\boldsymbol{e}_2)$，则 $(1-k)\boldsymbol{e}_1-(2+3k)\boldsymbol{e}_2=0$，由 $\boldsymbol{e}_1$ 与 $\boldsymbol{e}_2$ 不共线，得 $\begin{cases}1-k=0,\\2+3k=0,\end{cases}$ 此方程组无解，所以 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 不共线，故 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 可以构成表示其所在平面内所有向量的一个基底.

(2)设 $\boldsymbol{c}=m\boldsymbol{a}+n\boldsymbol{b}(m,n\in\mathbf{R})$，则 $3\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2=m(\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2)+n(\boldsymbol{e}_1+3\boldsymbol{e}_2)=(m+n)\boldsymbol{e}_1+(-2m+3n)\boldsymbol{e}_2$，因为 $\boldsymbol{e}_1$ 与 $\boldsymbol{e}_2$ 不共线，所以 $\begin{cases}m+n=3,\\-2m+3n=-1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}m=2,\\n=1,\end{cases}$ 故 $\boldsymbol{c}=2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.

(3)由 $4\boldsymbol{e}_1-3\boldsymbol{e}_2=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}$，得 $4\boldsymbol{e}_1-3\boldsymbol{e}_2=\lambda(\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2)+\mu(\boldsymbol{e}_1+3\boldsymbol{e}_2)=(\lambda+\mu)\boldsymbol{e}_1+(-2\lambda+3\mu)\boldsymbol{e}_2$，因为 $\boldsymbol{e}_1$ 与 $\boldsymbol{e}_2$ 不共线，所以 $\begin{cases}\lambda+\mu=4,\\-2\lambda+3\mu=-3,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}\lambda=3,\\\mu=1.\end{cases}$

14. **解**：(1)因为 A，O，D 三点共线，所以存在唯一实数 λ，使 $\overrightarrow{AO}=\lambda\overrightarrow{AD}(\lambda\in\mathbf{R})$. 因为 E，O，C 三点共线，
所以存在实数 μ，使 $\overrightarrow{AO}=\mu\overrightarrow{AE}+(1-\mu)\overrightarrow{AC}$，又 D 是 BC 的中点，E 在边 AB 上，且 $BE=2EA$，

所以 $\begin{cases}\overrightarrow{AO}=\lambda\overrightarrow{AD}=\lambda\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right)=\frac{1}{2}\lambda\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\lambda\overrightarrow{AC},\\\overrightarrow{AO}=\mu\overrightarrow{AE}+(1-\mu)\overrightarrow{AC}=\frac{\mu}{3}\overrightarrow{AB}+(1-\mu)\overrightarrow{AC},\end{cases}$

可得 $\begin{cases}\frac{1}{2}\lambda=\frac{\mu}{3},\\\frac{1}{2}\lambda=1-\mu,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}\lambda=\frac{1}{2},\\\mu=\frac{3}{4},\end{cases}$ 所以 $\overrightarrow{AO}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$.

(2)因为 H，O，G 三点共线，所以存在实数 m，使 $\overrightarrow{AO}=m\overrightarrow{AG}+(1-m)\overrightarrow{AH}$，又 $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AH}=t\overrightarrow{AC}$，

所以 $\overrightarrow{AO}=\frac{2m}{3}\overrightarrow{AB}+(1-m)t\overrightarrow{AC}$，

根据平面向量基本定理可得 $\begin{cases}\frac{2m}{3}=\frac{1}{4},\\(1-m)t=\frac{1}{4},\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}m=\frac{3}{8},\\t=\frac{2}{5},\end{cases}$

所以 $t=\frac{2}{5}$.

(3) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=6\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{EC}=6\left(\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}\right)\cdot\left(-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)=\frac{3}{2}\left(-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AC}^2+\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\right)$，

整理可得 $\overrightarrow{AC}^2=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}^2$，所以 $\frac{|\overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{AC}|}=\sqrt{3}$，即 $\frac{AB}{AC}=\sqrt{3}$.

15. AC 【解析】∵$\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{EC}$，∴$B$，$E$，$C$ 三点共线且 E 为边 BC 的中点. ∵$\overrightarrow{BF}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$，∴$\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AB}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$，∴$\overrightarrow{AF}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}-\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$，∴$A$，$F$，$C$ 三点共线且 F 为边 AC 上靠近点 A 的三等分点. ∵$\overrightarrow{BM}=\mu\overrightarrow{BF}$，∴$\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AB}=\mu(\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AB})$，∴$\overrightarrow{AM}=(1-\mu)\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AF}=(1-\mu)\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\mu\overrightarrow{AC}$，又 $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\lambda\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\lambda\overrightarrow{AC}$，∴$\begin{cases}1-\mu=\frac{1}{2}\lambda,\\\frac{1}{3}\mu=\frac{1}{2}\lambda,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}\lambda=\frac{1}{2},\\\mu=\frac{3}{4},\end{cases}$ 故 A 正确，B 错误. $\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{CA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{CA}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{CE}-\overrightarrow{CA})=\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}+\frac{1}{4}\overrightarrow{CB}$，故 C 正确. $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{EM}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{EB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}\neq\frac{1}{4}\overrightarrow{CA}+\frac{1}{4}\overrightarrow{CB}$，故 D 错误. 故选 AC.

16. **解**：(1)证明：∵$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BO}^2=(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC})\cdot\overrightarrow{BO}$，
∴$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{BO}^2-\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BO}=0$，
即 $\overrightarrow{BC}\cdot(\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BO})-\overrightarrow{BO}\cdot(\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BO})=0$，
∴$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{BO}\cdot\overrightarrow{OA}=0$，即 $(\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BO})\cdot\overrightarrow{OA}=0$，
∴$\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}=0$，∴$OA\perp OC$.

(2)依题意得 $\overrightarrow{CB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{AM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$，∴$\overrightarrow{AM}=\frac{2}{3}(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})=\frac{2}{3}(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CB})-\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}=\frac{2}{3}\overrightarrow{OC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}-\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}=\frac{2}{3}\overrightarrow{OC}-\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}$，∴$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OC}-\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}=\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OC}$.

∵$\overrightarrow{OA}=2\overrightarrow{CB}$，$\overrightarrow{CP}=x\overrightarrow{CB}(0\leqslant x\leqslant1)$，∴$\overrightarrow{CP}=\frac{x}{2}\overrightarrow{OA}$，

∴$\overrightarrow{OM}=\lambda\overrightarrow{CA}+\mu\overrightarrow{OP}=\lambda(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC})+\mu(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CP})=\left(\lambda+\frac{\mu x}{2}\right)\overrightarrow{OA}+(\mu-\lambda)\overrightarrow{OC}$，

又 $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OC}$ 不共线，∴$\begin{cases}\lambda+\frac{\mu x}{2}=\frac{2}{3},\\\mu-\lambda=\frac{2}{3},\end{cases}$ 即 $\begin{cases}\mu=\frac{8}{3(x+2)},\\\lambda=\mu-\frac{2}{3},\end{cases}$

∴$\lambda\cdot\mu=\mu\left(\mu-\frac{2}{3}\right)=\left(\mu-\frac{1}{3}\right)^2-\frac{1}{9}$.

∵$0\leqslant x\leqslant1$，∴$\frac{8}{9}\leqslant\mu\leqslant\frac{4}{3}$，∴当 $\mu=\frac{4}{3}$ 时，$\lambda\cdot\mu$ 取得最大值，且最大值为 $\frac{8}{9}$，此时 $x=0$.

6.3.2 平面向量的正交分解及坐标表示

6.3.3 平面向量加、减运算的坐标表示

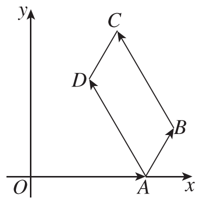
1. B 【解析】∵$\boldsymbol{a}=(-5,5)$，$\boldsymbol{b}=(0,-3)$，∴$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(-5,5)+(0,-3)=(-5,2)$. 故选 B.
2. D 【解析】由平面向量的坐标表示可知，当点 A 是原点时，点 B 的坐标是$(-2,4)$. 故选 D.
3. A 【解析】由题意知 $\overrightarrow{AB}=(4,2)-(2,3)=(2,-1)$，∴$\overrightarrow{AB}=2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}$. 故选 A.
4. A 【解析】由题意知 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的长度相等，方向相反，所以 $\overrightarrow{AB}=-\boldsymbol{a}=(-6,8)$. 由题知 $A(-1,2)$，设 $B(x,y)$，则 $\overrightarrow{AB}=(x+1,y-2)=(-6,8)$，
所以 $\begin{cases}x+1=-6,\\y-2=8,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=-7,\\y=10,\end{cases}$ 即 $B(-7,10)$. 故选 A.
5. C 【解析】由题意得 $\overrightarrow{AB}=(4,2)$，$\overrightarrow{CD}=(-3-x,y-3)$，∵$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$，∴$\begin{cases}-3-x=4,\\y-3=2,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=-7,\\y=5,\end{cases}$ 故选 C.
6. A 【解析】由题图可知 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{c}=(1,2)$，$\boldsymbol{b}=(1,-2)$，所以 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}=(1,-2)$. 故选 A.
7. C 【解析】设 $\overrightarrow{OA}=(x,y)$，则 $x=2024\cos\frac{\pi}{3}=1012$，$y=2024\sin\frac{\pi}{3}=1012\sqrt{3}$，故 $\overrightarrow{OA}=(1012,1012\sqrt{3})$.
8. ABD 【解析】易知 A，B，D 正确；由向量坐标的定义可知，一个坐标可对应无数个相等的向量，故 C 错误. 故选 ABD.
9. ACD 【解析】①当平行四边形为▱$ABCD$ 时，$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$，设点 D 的坐标为(x,y)，则$(4,6)-(3,7)=(1,-2)-(x,y)$，所以 $\begin{cases}1-x=1,\\-2-y=-1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=0,\\y=-1,\end{cases}$ 所以 $D(0,-1)$；②当平行

四边形为$\square ABDC$时,同理可得$D(2,-3)$;③当平行四边形为$\square ADBC$时,同理可得$D(6,15)$.故选ACD.

10. $(-4,0)$ $(0,6)$ $(-2,-5)$ 【解析】设$\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}$分别表示$x$轴和$y$轴正方向上的单位向量,以$\{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}\}$为基底,则$\boldsymbol{a}=-4\boldsymbol{i}+0\cdot\boldsymbol{j}$,$\therefore\boldsymbol{a}=(-4,0)$;$\boldsymbol{b}=0\cdot\boldsymbol{i}+6\boldsymbol{j}$,$\therefore\boldsymbol{b}=(0,6)$;$\boldsymbol{c}=-2\boldsymbol{i}-5\boldsymbol{j}$,$\therefore\boldsymbol{c}=(-2,-5)$.

11. $(9,1)$ 【解析】由题意,因为$\boldsymbol{a}=(3,4)$,$\boldsymbol{b}=(2,-5)$,$\boldsymbol{c}=(3,1)$,所以$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=(8,0)$,所以该质点从点$A(1,1)$出发,向右移动8个单位长度,该质点最终的坐标为$(9,1)$.

12. $(2,2\sqrt{3})$ 【解析】作出平行四边形$ABCD$,如图所示.因为$\angle BAD=180^\circ-\angle ABC=60^\circ$,所以$\angle OAD=\angle OAB-\angle BAD=60^\circ$,所以$\langle\overrightarrow{OA},\overrightarrow{AD}\rangle=120^\circ$.因为$|\overrightarrow{AD}|=|\overrightarrow{BC}|=4$,所以$\overrightarrow{AD}=(4\cos120^\circ,4\sin120^\circ)=(-2,2\sqrt{3})$,易知点$A(4,0)$,则$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AD}=(4,0)+(-2,2\sqrt{3})=(2,2\sqrt{3})$,因此,点$D$的坐标为$(2,2\sqrt{3})$.



13. 解:$\because\boldsymbol{b}=(-9,12)$,$\boldsymbol{c}=(-2,2)$,$\therefore\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}=(-9,12)-(-2,2)=(-7,10)$.$\because\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$,$\therefore\boldsymbol{a}=(-7,10)=\overrightarrow{AB}$,又$B(1,0)$,设点$A$的坐标为$(x,y)$,则$\overrightarrow{AB}=(1-x,0-y)=(-7,10)$,$\therefore\begin{cases}1-x=-7,\\0-y=10,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=8,\\y=-10,\end{cases}$即点$A$的坐标为$(8,-10)$.

14. 解:$\because|\overrightarrow{OD}|=1$,矩形$OBCD$与矩形$DEFG$全等,且$\overrightarrow{CG}=\overrightarrow{GD}$,$\therefore|\overrightarrow{OB}|=2$,则$C(1,2)$,$B(0,2)$,$G(1,1)$,$D(1,0)$,$F(3,1)$.

(1)$\overrightarrow{OD}=(1,0)$,$\overrightarrow{OB}=(0,2)$,$\overrightarrow{DF}=(3-1,1-0)=(2,1)$.

(2)$\because\overrightarrow{OC}=(1,2)$,$\overrightarrow{BG}=(1,-1)$,$\overrightarrow{DF}=(2,1)$,$\therefore\overrightarrow{OC}=-\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{DF}$,$\therefore\overrightarrow{OC}$在基底$\{\overrightarrow{BG},\overrightarrow{DF}\}$下的坐标为$(-1,1)$.

15. A 【解析】设O为坐标原点,由已知得$\overrightarrow{AB}=(\sqrt{3},2)$,$\overrightarrow{AP}=\left(\sqrt{3}\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)-2\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right),\sqrt{3}\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)+2\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)=\left(\frac{3\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2}\right)$,又$A(1,2)$,所以$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AP}=(1,2)+\left(\frac{3\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}+1,\frac{3}{2}\right)$,所以点$P$的坐标为$\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}+1,\frac{3}{2}\right)$.故选A.

16. 解:设点P的坐标为(x,y),则$\overrightarrow{AP}=(x,y)-(\lambda,3)=(x-\lambda,y-3)$,$\because\overrightarrow{AB}=(5,2\lambda)-(\lambda,3)=(5-\lambda,2\lambda-3)$,$\overrightarrow{AC}=(4,5)-(\lambda,3)=(4-\lambda,2)$,$\therefore\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=(5-\lambda,2\lambda-3)+(4-\lambda,2)=(9-2\lambda,2\lambda-1)$,

$\therefore\begin{cases}x-\lambda=9-2\lambda,\\y-3=2\lambda-1,\end{cases}$则$\begin{cases}x=9-\lambda,\\y=2\lambda+2.\end{cases}$

(1)由点P在第一、三象限的平分线上,得$9-\lambda=2\lambda+2$,解得$\lambda=\frac{7}{3}$.

(2)由点P在第一象限,得$\begin{cases}9-\lambda>0,\\2\lambda+2>0,\end{cases}$解得$-1<\lambda<9$,故$\lambda$的取值范围是$(-1,9)$.

6.3.4 平面向量数乘运算的坐标表示

1. A 【解析】$\because\boldsymbol{a}=(1,2)$,$\boldsymbol{b}=(-2,-4)$,$\therefore2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}=2(1,2)+3(-2,-4)=(2,4)+(-6,-12)=(-4,-8)$.故选A.

2. D 【解析】因为$\boldsymbol{a}=(1,1)$,所以$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$,所以与向量$\boldsymbol{a}=(1,1)$平行的单位向量为$\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$或$-\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=-\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.故选D.

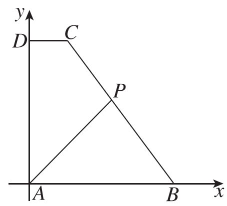
3. D 【解析】$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=(4,m+6)$,因为$A,C,D$三点共线,所以$\overrightarrow{AC}$与$\overrightarrow{AD}$共线,所以$4\times2m=-(m+6)$,解得$m=-\frac{2}{3}$.故选D.

4. A 【解析】因为$\boldsymbol{a}=(1,1)$,$\boldsymbol{b}=(1,-1)$,所以$\boldsymbol{a}-\mu\boldsymbol{b}=(1-\mu,1+\mu)$,$\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}=(1+\lambda,1-\lambda)$,又$(\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b})\parallel(\boldsymbol{a}-\mu\boldsymbol{b})$,所以$(1-\lambda)(1-\mu)=(1+\lambda)(1+\mu)$,化简可得$\lambda+\mu=0$.故选A.

5. D 【解析】设$\boldsymbol{e}_1=(1,0)$,$\boldsymbol{e}_2=(0,1)$,则由题图可知$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(1,-3)$,$\because\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{e}_1+\mu\boldsymbol{e}_2=\lambda(1,0)+\mu(0,1)=(\lambda,\mu)$,$\therefore\lambda=1$,$\mu=-3$,则$\frac{\lambda}{\mu}=-\frac{1}{3}$.故选D.

6. D 【解析】因为向量$\boldsymbol{a}=(1,2)$,$\boldsymbol{b}=(\cos\theta,\sin\theta)$,且向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$平行,所以$1\cdot\sin\theta-2\cdot\cos\theta=0$,即$\tan\theta=2$.故选D.

7. D 【解析】如图,以A为原点,AB所在直线为x轴,AD所在直线为y轴,建立平面直角坐标系,则$A(0,0)$,$B(4,0)$,$D(0,4)$,$C(1,4)$,则$\overrightarrow{AB}=(4,0)$,$\overrightarrow{AD}=(0,4)$,$\overrightarrow{BC}=(-3,4)$,设$\overrightarrow{BP}=\lambda\overrightarrow{BC}=(-3\lambda,4\lambda)(\lambda\in(0,1))$,则$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BP}=(4-3\lambda,4\lambda)$.因为$\overrightarrow{AP}=m\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{AD}=(4m,4n)$,所以$\begin{cases}4-3\lambda=4m,\\4\lambda=4n,\end{cases}$消去$\lambda$,得$m+\frac{3}{4}n=1$.因为$m>0$,$n>0$,所以$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\left(m+\frac{3}{4}n\right)\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)=1+\frac{3n}{4m}+\frac{m}{n}+\frac{3}{4}\geqslant\frac{7}{4}+2\sqrt{\frac{3n}{4m}\cdot\frac{m}{n}}=\frac{7+4\sqrt{3}}{4}$,当且仅当$m=\frac{\sqrt{3}}{2}n$,即$\begin{cases}m=4-2\sqrt{3},\\n=\frac{4(2\sqrt{3}-3)}{3}\end{cases}$时等号成立.故$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}$的最小值为$\frac{7+4\sqrt{3}}{4}$.故选D.



8. ABD 【解析】由题知$\overrightarrow{AC}=(2,0)$,$\overrightarrow{BC}=(0,-1)$,所以$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}=0$,则$\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{BC}$,所以$\triangle ABC$是直角三角形,A正确.若点$D(4,1)$,则$\overrightarrow{BD}=(2,0)$,所以$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}$,则四边形$ACDB$是平行四边形,B正确.若$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=(4,1)$,则$P(4,1)$,C错误.若$\overrightarrow{AP}=2\overrightarrow{BP}$,则$B$是$AP$的中点,所以$P(4,2)$,D正确.故选ABD.

9. BC 【解析】由题意得$\overrightarrow{P_1P}=\frac{1}{3}\overrightarrow{P_1P_2}$或$\overrightarrow{P_1P}=\frac{2}{3}\overrightarrow{P_1P_2}$,$\overrightarrow{P_1P_2}=(3,-3)$,设$P(x,y)$,则$\overrightarrow{P_1P}=(x-1,y-3)$.当$\overrightarrow{P_1P}=\frac{1}{3}\overrightarrow{P_1P_2}$时,$(x-1,y-3)=\frac{1}{3}(3,-3)$,所以$x=2$,$y=2$,即$P(2,2)$;当$\overrightarrow{P_1P}=\frac{2}{3}\overrightarrow{P_1P_2}$时,$(x-1,y-3)=\frac{2}{3}(3,-3)$,所以$x=3$,$y=1$,即$P(3,1)$.故选BC.

10. $\frac{3}{2}$ 【解析】$\because$向量$\boldsymbol{a}=(2,1)$,$\boldsymbol{b}=(3,m)$,$\therefore2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(1,2-m)$,又$2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$与$\boldsymbol{b}$平行,$\therefore3(2-m)-m=0$,解得$m=\frac{3}{2}$.

11. $(1,4)$ 【解析】设$C(x,y)$,$M(x_1,y_1)$,则$\overrightarrow{BC}=(x-3,y-2)$,由题得$\overrightarrow{AD}=(1,4)$,因为$\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{AD}$,所以$(x-3,y-2)=2(1,4)$,所以$\begin{cases}x-3=2,\\y-2=8,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=5,\\y=10,\end{cases}$即$C(5,10)$.因为$\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{AD}$,所以$\triangle DMA\backsim\triangle BMC$,所以$\frac{|\overrightarrow{AM}|}{|\overrightarrow{MC}|}=\frac{|\overrightarrow{AD}|}{|\overrightarrow{BC}|}=\frac{1}{2}$,所以$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$,则$(x_1+1,y_1-1)=\frac{1}{3}(6,9)=(2,3)$,所以$\begin{cases}x_1+1=2,\\y_1-1=3,\end{cases}$解得$\begin{cases}x_1=1,\\y_1=4,\end{cases}$故点$M$的坐标为$(1,4)$.

12. $(0,2)$ 【解析】由已知得$\boldsymbol{a}=-2\boldsymbol{p}+2\boldsymbol{q}=(-2,2)+(4,2)=(2,4)$.设$\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{m}+\mu\boldsymbol{n}=\lambda(-1,1)+\mu(1,2)=(-\lambda+\mu,\lambda+2\mu)$,则$\begin{cases}-\lambda+\mu=2,\\\lambda+2\mu=4,\end{cases}$解得$\begin{cases}\lambda=0,\\\mu=2,\end{cases}$$\therefore\boldsymbol{a}$在基底$\{\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\}$下的坐标为$(0,2)$.

13. **解**:(1)根据题意,向量 $\boldsymbol{a}=(1,2)$,$\boldsymbol{b}=(-1,3)$,则 $6\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(5,15)$. 设与 $6\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 共线的单位向量为 $\boldsymbol{e}$,且 $\boldsymbol{e}=t(6\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=(5t,15t)(t\in\mathbf{R})$,则有 $25t^2+225t^2=1$,解得 $t=\pm\frac{\sqrt{10}}{50}$,故 $\boldsymbol{e}=\left(\frac{\sqrt{10}}{10},\frac{3\sqrt{10}}{10}\right)$ 或 $\left(-\frac{\sqrt{10}}{10},-\frac{3\sqrt{10}}{10}\right)$.

(2)由 $\boldsymbol{c}=m\boldsymbol{a}+n\boldsymbol{b}$,得 $(4,3)=m(1,2)+n(-1,3)$,则有 $\begin{cases}4=m-n,\\3=2m+3n,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}m=3,\\n=-1.\end{cases}$

(3)根据题意,$\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{c}=(1+4k,2+3k)$,$\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}=(-2,1)$,由 $(\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{c})/\!/(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})$,得 $1+4k+2(2+3k)=0$,解得 $k=-\frac{1}{2}$.

14. **解**:(1)因为 $A(-5,0)$,$B(3,-3)$,所以 $\overrightarrow{AB}=(8,-3)$,又 D 为边 AB 的中点,

所以 $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}(8,-3)=\left(4,-\frac{3}{2}\right)$.

(2)因为 $A(-5,0)$,$C(0,2)$,所以 $\overrightarrow{CA}=(-5,-2)$.

当 D 为靠近 A 的三等分点时,$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{3}(8,-3)=\left(\frac{8}{3},-1\right)$,则 $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AD}=(-5,-2)+\left(\frac{8}{3},-1\right)=\left(-\frac{7}{3},-3\right)$,所以 $|\overrightarrow{CD}|=\sqrt{\left(-\frac{7}{3}\right)^2+(-3)^2}=\frac{\sqrt{130}}{3}$;

当 D 为靠近 B 的三等分点时,$\overrightarrow{AD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}=\frac{2}{3}(8,-3)=\left(\frac{16}{3},-2\right)$,则 $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AD}=(-5,-2)+\left(\frac{16}{3},-2\right)=\left(\frac{1}{3},-4\right)$,所以 $|\overrightarrow{CD}|=\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2+(-4)^2}=\frac{\sqrt{145}}{3}$.

综上,线段 CD 的长为 $\frac{\sqrt{130}}{3}$ 或 $\frac{\sqrt{145}}{3}$.

(3)设 $\overrightarrow{AD}=\lambda\overrightarrow{AB}=(8\lambda,-3\lambda)$,$0\leqslant\lambda\leqslant1$,则 $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AD}=(-5,-2)+(8\lambda,-3\lambda)=(8\lambda-5,-3\lambda-2)$,

所以 $|\overrightarrow{CD}|^2=(8\lambda-5)^2+(-3\lambda-2)^2=73\lambda^2-68\lambda+29$,

由二次函数的性质可知,当 $\lambda=-\frac{-68}{2\times73}=\frac{34}{73}$ 时,$|\overrightarrow{CD}|^2$ 取得最小值,即 $|\overrightarrow{CD}|$ 取得最小值,此时 $\frac{|\overrightarrow{AD}|}{|\overrightarrow{AB}|}=\lambda=\frac{34}{73}$.

15. 0 **[解析]** 因为 $\boldsymbol{m}/\!/\boldsymbol{n}$,$\boldsymbol{m}=(a+\cos x,1)$,$\boldsymbol{n}=(-1,a+\cos y)$,所以 $(a+\cos x)(a+\cos y)-1\times(-1)=0$,整理得 $a^2+a(\cos x+\cos y)+\cos x\cos y+1=0$,又因为 $a\in\mathbf{R}$,所以 $\Delta=(\cos x+\cos y)^2-4(\cos x\cos y+1)\geqslant0$,所以 $(\cos x-\cos y)^2-4\geqslant0$,所以 $|\cos x-\cos y|\geqslant2$,所以 $\cos x=1$,$\cos y=-1$ 或 $\cos x=-1$,$\cos y=1$. 当 $\cos x=1$,$\cos y=-1$ 时,可得 $a^2=0$,所以 $a=0$;当 $\cos x=-1$,$\cos y=1$ 时,可得 $a^2=0$,所以 $a=0$. 综上所述,集合 $\{a\in\mathbf{R}\mid\exists x,y\in\mathbf{R},\boldsymbol{m}/\!/\boldsymbol{n}\}$ 中的所有元素之和为 0.

16. **解**:(1)$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}=(2,1)+t(4,3)=(4t+2,3t+1)$,

若点 P 在第一象限,则 $\begin{cases}4t+2>0,\\3t+1>0,\end{cases}$ 解得 $t>-\frac{1}{3}$,故 t 的取值范围为 $\left(-\frac{1}{3},+\infty\right)$.

(2)若四边形 $OABP$ 是平行四边形,则 $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{AB}$,

$\because\overrightarrow{OP}=(4t+2,3t+1)$,$\overrightarrow{AB}=(2,2)$,

$\therefore\begin{cases}4t+2=2,\\3t+1=2,\end{cases}$ 该方程组无解,故四边形 $OABP$ 不能成为平行四边形.

6.3.5 平面向量数量积的坐标表示

1. D **[解析]** $\because\boldsymbol{a}=(3,-2)$,$\boldsymbol{b}=(-2,1)$,$\therefore\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-6-2=-8$. 故选 D.

2. B **[解析]** 因为 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$,所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2m-6=0$,解得 $m=3$. 故选 B.

3. A **[解析]** 由 $\boldsymbol{a}=(-2,2\sqrt{3})$,$\boldsymbol{b}=(1,\sqrt{3})$,得 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{(-2)^2+(2\sqrt{3})^2}=4$,$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-2\times1+2\sqrt{3}\times\sqrt{3}=4$,所以 $\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 上的投影向量为 $\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|^2}\boldsymbol{a}=\frac{4}{4^2}\boldsymbol{a}=\frac{1}{4}\boldsymbol{a}$. 故选 A.

4. A **[解析]** 方法一:因为 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$,所以 $4x+4=0$,解得 $x=-1$,则 $\boldsymbol{b}=(-1,-2)$,所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2\times(-1)+4\times(-2)=-10$,故 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2}=\sqrt{\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}=\sqrt{(2^2+4^2)+[(-1)^2+(-2)^2]+2\times(-10)}=\sqrt{5}$. 故选 A.

方法二:因为 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$,所以 $4x+4=0$,解得 $x=-1$,则 $\boldsymbol{b}=(-1,-2)$,故 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(2,4)+(-1,-2)=(1,2)$,则 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$. 故选 A.

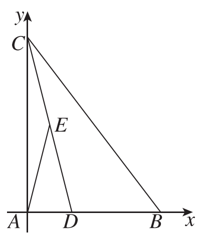
5. C **[解析]** 根据已知得 $\overrightarrow{AB}=(1,1)$,$\overrightarrow{AC}=(-2,1)$,$\overrightarrow{BC}=(-3,0)$,因为 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-2+1=-1<0$,所以 $\angle BAC$ 是一个钝角,故 $\triangle ABC$ 为钝角三角形. 故选 C.

6. D **[解析]** 设 $D(x,y)$,则 $\overrightarrow{BC}=(1,-2)$,$\overrightarrow{AB}=(1,3)$,$\overrightarrow{AD}=(x-1,y+1)$,$\overrightarrow{CD}=(x-3,y)$. 由题意可得 $\begin{cases}2x+y-1=0,\\x-3+3y=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=0,\\y=1,\end{cases}$ 所以点 D 的坐标为 $(0,1)$. 故选 D.

7. B **[解析]** 因为向量 $\boldsymbol{a}=(2,1)$,$\boldsymbol{b}=(-4,3)$,所以 $\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{2\times(-4)+1\times3}{\sqrt{5}\times5}=-\frac{\sqrt{5}}{5}$,又 $\theta\in[0,\pi]$,所以 $\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$,所以 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta=\sqrt{5}\times5\times\frac{2\sqrt{5}}{5}=10$. 故选 B.

8. AD **[解析]** 对于选项 A,$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(3,4)$,$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}=3\times(-4)+4\times3=0$,所以 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{a}$,A 正确;对于选项 B,$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(-11,2)$,所以 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{(-11)^2+2^2}=5\sqrt{5}$,B 错误;对于选项 C,$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{(-4)^2+3^2}=5$,所以与向量 $\boldsymbol{a}$ 平行的单位向量是 $\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\left(-\frac{4}{5},\frac{3}{5}\right)$ 或 $-\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\left(\frac{4}{5},-\frac{3}{5}\right)$,C 错误;对于选项 D,向量 $\boldsymbol{a}$ 在向量 $\boldsymbol{b}$ 上的投影向量为 $|\boldsymbol{a}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle\cdot\frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}=|\boldsymbol{a}|\cdot\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}\cdot\frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|^2}\cdot\boldsymbol{b}=\frac{(-4)\times7+3\times1}{(\sqrt{7^2+1^2})^2}\cdot\boldsymbol{b}=-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$,D 正确. 故选 AD.

9. AC **[解析]** 对于 A,$\because E$ 为 CD 的中点,$\therefore\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AC})=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)=\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$,A 正确;对于 B,以 A 为坐标原点,$\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{AC}$ 的方向分别为 x,y 轴正方向建立平面直角坐标系,则 $A(0,0)$,$B(6,0)$,$C(0,8)$,$D(2,0)$,$E(1,4)$,$\therefore\overrightarrow{AE}=(1,4)$,$\overrightarrow{ED}=(1,-4)$,$\therefore\cos\langle\overrightarrow{AE},\overrightarrow{ED}\rangle=\frac{\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{ED}}{|\overrightarrow{AE}|\cdot|\overrightarrow{ED}|}=\frac{1-16}{\sqrt{17}\times\sqrt{17}}=-\frac{15}{17}$,即 $\overrightarrow{AE}$ 与 $\overrightarrow{ED}$ 的夹角的余弦值为 $-\frac{15}{17}$,B 错误;对于 C,$\because\overrightarrow{AE}=(1,4)$,$\overrightarrow{CD}=(2,-8)$,$\therefore\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{CD}=1\times2+4\times(-8)=-30$,C 正确;对于 D,$S_{\triangle AED}=\frac{1}{2}\times2\times4=4$,D 错误. 故选 AC.

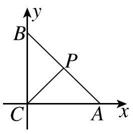


10. -1 **[解析]** 方法一:由 $\boldsymbol{a}=(m,2)$,$\boldsymbol{b}=(2,1)$,得 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(m+2,3)$,根据 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2=|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2$,得 $(m+2)^2+9=m^2+2^2+5$,解得 $m=-1$.

方法二:由 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2=|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2$ 得 $|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2$,所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$,又 $\boldsymbol{a}=(m,2)$,$b=(2,1)$,所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2m+2=0$,解得 $m=-1$.

11. $(1,0)$ 或 $(-1,0)$ **[解析]** 设与 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 夹角相同的单位向量 $\boldsymbol{e}=(x,y)$,由题意得 $\frac{2x+y}{\sqrt{5}}=\frac{2x-y}{\sqrt{5}}$,解得 $y=0$,因为 $x^2+y^2=1$,所以 $x=1$ 或 $x=-1$,故与 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 夹角相同的单位向量为 $(1,0)$ 或 $(-1,0)$.

12. 4 【解析】以 C 为坐标原点，CA 所在直线为 x 轴，CB 所在直线为 y 轴，建立如图所示的平面直角坐标系，可得 $C(0,0)$，$A(2,0)$，$B(0,2)$，$P(1,1)$，所以 $\overrightarrow{CP}=(1,1)$，$\overrightarrow{CA}=(2,0)$，$\overrightarrow{CB}=(0,2)$，所以 $\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}=(2,0)+(0,2)=(2,2)$，故 $\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CP}\cdot(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA})=2+2=4$.



13. **解**：(1)由题得 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1\times(-2)+2\times(-4)=-10$，则 $(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2+4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+4\boldsymbol{b}^2=5-40+80=45$，

所以 $|\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}|=3\sqrt{5}$.

(2)由向量 $\boldsymbol{a}=(1,2)$，$\boldsymbol{b}=(-2,-4)$，可知 $\boldsymbol{a}=-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$.

设 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 的夹角为 θ，$\theta\in[0,\pi]$，则 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 的夹角为 $\pi-\theta$，

因为 $|\boldsymbol{c}|=\sqrt{5}$，$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\frac{5}{2}$，即 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=\frac{5}{2}$，

所以 $|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{c}|\cos\theta+|\boldsymbol{b}|\cdot|\boldsymbol{c}|\cos(\pi-\theta)=\frac{5}{2}$，

可得 $5\cos\theta-10\cos\theta=\frac{5}{2}$，

所以 $\cos\theta=-\frac{1}{2}$，可得 $\theta=\frac{2\pi}{3}$，即 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 的夹角为 $\frac{2\pi}{3}$.

14. **解**：(1)因为 $\boldsymbol{a}=(1,0)$，$\boldsymbol{b}=(2,1)$，

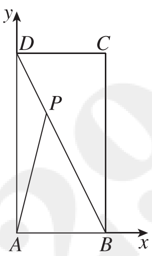
所以 $\overrightarrow{AB}=2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=2(1,0)-(2,1)=(0,-1)$，$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}+m\boldsymbol{b}=(1,0)+m(2,1)=(2m+1,m)$，

又 A,B,C 三点共线，所以 $\overrightarrow{AB}/\!/\overrightarrow{BC}$，

所以 $-1\times(2m+1)=0\times m$，解得 $m=-\frac{1}{2}$.

(2)因为 $k\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=k(1,0)-(2,1)=(k-2,-1)$，$\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}=(1,0)+2(2,1)=(5,2)$，$k\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$ 垂直，所以 $(k\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})=(k-2)\times5+(-1)\times2=0$，解得 $k=\frac{12}{5}$.

15. BCD 【解析】以 A 为坐标原点，$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AD}$ 的方向分别为 x，y 轴的正方向，建立如图所示的平面直角坐标系，则 $A(0,0)$，$B(2,0)$，$D(0,4)$，所以 $\overrightarrow{AB}=(2,0)$，$\overrightarrow{AD}=(0,4)$，因为 $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AD}$，所以 $\overrightarrow{AP}=(2\lambda,4\mu)$，故点 P 的坐标为 $(2\lambda,4\mu)$. 对于 A，因为 $\lambda=1$，所以点 P 的坐标为 $(2,4\mu)$，$\mu\in[0,1]$，所以 $\overrightarrow{DP}=(2,4\mu-4)$，所以 $|\overrightarrow{DP}|=\sqrt{2^2+16(\mu-1)^2}\geqslant2$，当且仅当 $\mu=1$ 时取等号，所以当 $\mu=1$ 时，$|\overrightarrow{DP}|$ 取得最小值，最小值为 2，A 错误；对于 B，因为 $\mu=1$，所以点 P 的坐标为 $(2\lambda,4)$，所以点 P 到边 AB 的距离为 4，所以 $\triangle ABP$ 的面积 $S=\frac{1}{2}\times2\times4=4$，B 正确；对于 C，因为 $\mu=\frac{1}{2}$，所以点 P 的坐标为 $(2\lambda,2)$，所以 $\overrightarrow{PA}=(-2\lambda,-2)$，$\overrightarrow{PB}=(2-2\lambda,-2)$，若 $\overrightarrow{PA}\perp\overrightarrow{PB}$，则 $-4\lambda+4\lambda^2+4=0$，即 $\lambda^2-\lambda+1=0$，方程 $\lambda^2-\lambda+1=0$ 无实数根，所以满足 $\overrightarrow{PA}\perp\overrightarrow{PB}$ 的点 P 不存在，C 正确；对于 D，因为 $\lambda=\frac{1}{3}$，$\mu=\frac{2}{3}$，所以点 P 的坐标为 $\left(\frac{2}{3},\frac{8}{3}\right)$，所以 $\triangle ABP$ 的面积为 $\frac{1}{2}\times2\times\frac{8}{3}=\frac{8}{3}$，D 正确. 故选 BCD.



16. **解**：(1) $\because\boldsymbol{a}=(3,-2)$，$\boldsymbol{b}=(2,1)$，$\therefore m\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(3m+2,-2m+1)$，$\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}=(-1,-4)$. 令 $(m\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})<0$，即 $-3m-2+8m-4<0$，解得 $m<\frac{6}{5}$，当 $m=-\frac{1}{2}$ 时，$m\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，此时 $\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$ 与 $m\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 方向相反，夹角为 $180°$，不符合题意，$\therefore m\neq-\frac{1}{2}$，故若 $m\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$ 的夹角为钝角，

则 m 的取值范围是 $\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)\cup\left(-\frac{1}{2},\frac{6}{5}\right)$.

(2) $\because\boldsymbol{a}-t\boldsymbol{b}=(3-2t,-2-t)$，$\therefore|\boldsymbol{a}-t\boldsymbol{b}|=\sqrt{(3-2t)^2+(-2-t)^2}=\sqrt{5t^2-8t+13}$.

令 $f(t)=5t^2-8t+13$，$t\in[-1,1]$，易知当 $t=\frac{4}{5}$ 时，$f(t)_{\min}=\frac{49}{5}$，当 $t=-1$ 时，$f(t)_{\max}=26$，故 $|\boldsymbol{a}-t\boldsymbol{b}|$ 的取值范围为 $\left[\frac{7\sqrt{5}}{5},\sqrt{26}\right]$.

习题课　平面向量数量积的综合应用

1. D 【解析】由题意可知 $|\overrightarrow{BC}|=|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|$，所以 $|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|$，两边平方得 $\overrightarrow{AB}^2-2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}^2=\overrightarrow{AB}^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}^2$，所以 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$，故 $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}$，则 $\triangle ABC$ 为直角三角形. 故选 D.

2. AC 【解析】设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，则 $|\boldsymbol{a}|=4$，$|\boldsymbol{b}|=2$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=4\times2\times\cos60°=4$. 对于 A，$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$，故 A 正确；对于 B，由 A 选项可得 $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，则 $\overrightarrow{AE}^2=\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\right)^2=\frac{1}{4}\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2=\frac{1}{4}\times16+4+4=12$，所以 $|\overrightarrow{AE}|=2\sqrt{3}$，故 B 错误；对于 C，因为 $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}=-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，所以 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BD}=\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\right)\cdot(-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}^2-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2=-\frac{1}{2}\times16-\frac{1}{2}\times4+4=-6$，故 C 正确；对于 D，$\overrightarrow{AD}$ 在 $\overrightarrow{AB}$ 上的投影向量为 $\frac{\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|^2}\cdot\overrightarrow{AB}=\frac{4}{16}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$，故 D 错误. 故选 AC.

3. $\left[-\frac{1}{2},0\right]$ 【解析】连接 OC，则 $|\overrightarrow{OC}|=|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=1$，设 $\angle AOC=\theta\left(\theta\in\left[0,\frac{2\pi}{3}\right]\right)$，则 $\angle BOC=\frac{2\pi}{3}-\theta$，所以 $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC})\cdot(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC})=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OC}^2=1\times1\times\cos\frac{2\pi}{3}-1\times1\times\cos\theta-1\times1\times\cos\left(\frac{2\pi}{3}-\theta\right)+1=\frac{1}{2}-\cos\theta-\cos\left(\frac{2\pi}{3}-\theta\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos\theta-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta=\frac{1}{2}-\cos\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)$. 因为 $\theta\in\left[0,\frac{2\pi}{3}\right]$，所以 $\theta-\frac{\pi}{3}\in\left[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right]$，所以 $\cos\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)\in\left[\frac{1}{2},1\right]$，故 $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=\frac{1}{2}-\cos\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)\in\left[-\frac{1}{2},0\right]$.

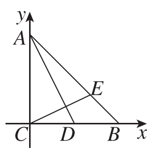
4. $[-2\sqrt{3},2\sqrt{3}]$ 【解析】由 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}-1=0$，得 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-1=(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}||\boldsymbol{c}|\cos\langle\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\rangle$，则 $|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-1|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}||\cos\langle\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\rangle|\leqslant|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$，当且仅当 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 共线时取等号，两边平方得 $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+1\leqslant\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，即 $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2+1\leqslant3^2+2^2$，解得 $-2\sqrt{3}\leqslant\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\leqslant2\sqrt{3}$，所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 的取值范围是 $[-2\sqrt{3},2\sqrt{3}]$.

5. **解**：(1) $\because\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{CD}=\boldsymbol{b}$，$D$ 是 CB 的中点，

$\therefore\overrightarrow{CB}=2\boldsymbol{b}$，$\therefore\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}=2\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$，

$\therefore\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AE}=\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}(2\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.

(2)证明：如图，以点 C 为坐标原点，以 CB，CA 所在直线分别为 x 轴、y 轴，建立平面直角坐标系.



设 $A(0,a)$，则 $B(a,0)$，$C(0,0)$，$D\left(\frac{a}{2},0\right)$.

设 $E(x,y)$，$\because\overrightarrow{AE}=2\overrightarrow{EB}$，$\therefore(x,y-a)=2(a-x,-y)$，则 $\begin{cases}x=2(a-x),\\y-a=-2y,\end{cases}$ $\therefore\begin{cases}x=\frac{2a}{3},\\y=\frac{a}{3},\end{cases}$ 即 $E\left(\frac{2a}{3},\frac{a}{3}\right)$，

$\therefore \overrightarrow{AD}=\left(\frac{a}{2},-a\right)$，$\overrightarrow{CE}=\left(\frac{2a}{3},\frac{a}{3}\right)$，$\therefore \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CE}=\frac{a}{2}\times\frac{2a}{3}+(-a)\times\frac{a}{3}=0$，$\therefore \overrightarrow{AD}\perp\overrightarrow{CE}$，故 $AD\perp CE$.

6. **解**：(1)设 $\overrightarrow{FN}=t\overrightarrow{FB}$，则 $\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FN}=\overrightarrow{AF}+t\overrightarrow{FB}=\overrightarrow{AF}+t(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AF})=(1-t)\overrightarrow{AF}+t\overrightarrow{AB}=\frac{1-t}{2}\overrightarrow{AD}+t\overrightarrow{AB}$.

设 $\overrightarrow{AN}=\mu\overrightarrow{AE}=\mu\left(\overrightarrow{AD}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\right)=\mu\overrightarrow{AD}+\frac{\mu}{3}\overrightarrow{AB}$.

根据平面向量基本定理得 $\begin{cases}\mu=\frac{1-t}{2},\\ \frac{1}{3}\mu=t,\end{cases}$ 解得 $t=\frac{1}{7}$，

所以 $\overrightarrow{AN}=\frac{1}{7}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{7}\overrightarrow{AD}$，则 $x=\frac{1}{7}$，$y=\frac{3}{7}$，所以 $xy=\frac{3}{49}$.

(2)因为 $\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DE}=(\lambda-1)\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$，

$\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{FD}+\overrightarrow{DE}=\lambda\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$，

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AD}|\cos\angle BAD=3\times2\times\frac{1}{3}=2$，

所以 $\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{FE}=(\lambda^2-\lambda)\overrightarrow{AB}^2+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}^2+\left(\frac{3}{2}\lambda-\frac{1}{2}\right)\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=4(\lambda^2-\lambda)+\frac{9}{2}+3\lambda-1=4\lambda^2-\lambda+\frac{7}{2}$.

因为 $\lambda\in[0,1]$，所以当 $\lambda=-\frac{-1}{2\times4}=\frac{1}{8}$ 时，$\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{FE}$ 取得最小值，最小值为 $\frac{55}{16}$，当 $\lambda=1$ 时，$\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{FE}$ 取得最大值，最大值为 $\frac{13}{2}$，故 $\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{FE}$ 的取值范围为 $\left[\frac{55}{16},\frac{13}{2}\right]$.

滚动习题（二）

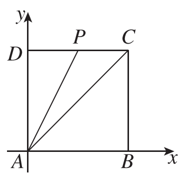
1. D 【解析】由题意得 $A(x^2+x+1,-x^2+x-1)$，$\because x^2+x+1>0$，$-x^2+x-1<0$，$\therefore$ 点 A 位于第四象限，故选 D.

2. D 【解析】因为 $\boldsymbol{a}=(-2,4)$，$\boldsymbol{b}=(1,-2)$，所以 $\boldsymbol{a}=-2\boldsymbol{b}$，所以 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 方向相反. 故选 D.

3. D 【解析】向量 $\boldsymbol{a}=(\sin\alpha,2)$，$\boldsymbol{b}=(1,-\cos\alpha)$，$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\sin\alpha-2\cos\alpha=0$，故 $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{2\cos\alpha}{\cos\alpha}=2$. 故选 D.

4. A 【解析】因为 $\boldsymbol{a}=(2,0)$，$\boldsymbol{b}=(1,\sqrt{3})$，所以 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(1,-\sqrt{3})$，$\boldsymbol{a}-k\boldsymbol{b}=(2-k,-\sqrt{3}k)$，所以 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=2$，$|\boldsymbol{a}-k\boldsymbol{b}|=2\sqrt{1-k+k^2}$，$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-k\boldsymbol{b})=2-k+3k=2+2k$，又向量 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}-k\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{6}$，所以 $\cos\langle\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}-k\boldsymbol{b}\rangle=\frac{(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-k\boldsymbol{b})}{|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|\cdot|\boldsymbol{a}-k\boldsymbol{b}|}=\frac{2+2k}{2\times2\sqrt{1-k+k^2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以 $2k^2-5k+2=0$，所以 $k=2$ 或 $k=\frac{1}{2}$，故选 A.

5. C 【解析】以 A 为原点，建立平面直角坐标系如图，则 $A(0,0)$，$C(2,2)$，$D(0,2)$，可得 $\overrightarrow{AC}=(2,2)$，$\overrightarrow{AD}=(0,2)$，所以 $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD})=(1,2)$，所以 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AC}=1\times2+2\times2=6$. 故选 C.



6. B 【解析】由题意，在 $\triangle ABC$ 中，G 为 $\triangle ABC$ 的重心，且 $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AN}=\mu\overrightarrow{AC}$，$0<\lambda\leqslant1$，$0<\mu\leqslant1$，设 D 为 BC 的中点，连接 AD，则 $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{\lambda}\overrightarrow{AM}+\frac{1}{\mu}\overrightarrow{AN}\right)$，因为 M,N,G 三点共线，所以 $\frac{1}{3\lambda}+\frac{1}{3\mu}=1$，故 $\lambda+4\mu=(\lambda+4\mu)\left(\frac{1}{3\lambda}+\frac{1}{3\mu}\right)=\frac{5}{3}+\frac{4\mu}{3\lambda}+\frac{\lambda}{3\mu}\geqslant\frac{5}{3}+2\sqrt{\frac{4\mu}{3\lambda}\cdot\frac{\lambda}{3\mu}}=3$，当且仅当 $\frac{4\mu}{3\lambda}=\frac{\lambda}{3\mu}$，$\frac{1}{3\lambda}+\frac{1}{3\mu}=1$，即 $\lambda=1$，$\mu=\frac{1}{2}$ 时等号成立，故 $\lambda+4\mu$ 的最小值为 3，故选 B.

7. ABD 【解析】因为 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 是平面内两个不共线的向量，对于 A，设 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$，即 $\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2=\lambda\boldsymbol{e}_1$，显然不成立，即 $\boldsymbol{a}$ 不能用 $\boldsymbol{b}$ 表示，所以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 不共线，故 A 符合题意；对于 B，设 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$，即 $2\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2=\lambda\left(\frac{1}{4}\boldsymbol{e}_1+\frac{1}{2}\boldsymbol{e}_2\right)=\frac{\lambda}{4}\boldsymbol{e}_1+\frac{\lambda}{2}\boldsymbol{e}_2$，则 $\begin{cases}\frac{\lambda}{4}=2,\\ \frac{\lambda}{2}=1,\end{cases}$ 无解，即 $\boldsymbol{a}$ 不能用 $\boldsymbol{b}$ 表示，所以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 不共线，故 B 符合题意；对于 C，$\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{b}$，所以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 共线，故 C 不符合题意；对于 D，设 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$，即 $\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2=\lambda(-\boldsymbol{e}_1+4\boldsymbol{e}_2)=-\lambda\boldsymbol{e}_1+4\lambda\boldsymbol{e}_2$，则 $\begin{cases}-\lambda=1,\\ 4\lambda=-2,\end{cases}$ 无解，即 $\boldsymbol{a}$ 不能用 $\boldsymbol{b}$ 表示，所以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 不共线，故 D 符合题意. 故选 ABD.

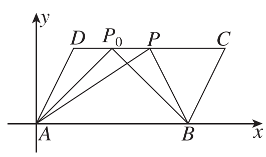
8. AB 【解析】对于 A，若 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，则 $\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta=0$，可得 $\tan\theta=-\frac{\sqrt{3}}{3}$，A 正确；对于 B，$|\boldsymbol{a}|=2$，$|\boldsymbol{b}|=1$，则 $\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 上的投影向量为 $-\frac{1}{4}\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle\cdot\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle}{2}\cdot\boldsymbol{a}$，所以 $\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=-\frac{1}{2}$，因为 $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle\in[0,\pi]$，所以 $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{2\pi}{3}$，B 正确；对于 C，若 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 共线，设 $\boldsymbol{b}=(\lambda,\sqrt{3}\lambda)(\lambda\neq0)$，则有 $\lambda^2+3\lambda^2=1$，解得 $\lambda=\pm\frac{1}{2}$，因为 $\boldsymbol{b}=(\cos\theta,\sin\theta)(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$，即 $\sin\theta\geqslant0$，所以 $\lambda=\frac{1}{2}$，所以 $\boldsymbol{b}=\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，C 不正确；对于 D，若 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$，则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 反向，设 $t\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}(t<0)$，则 $\boldsymbol{b}=(t,\sqrt{3}t)$，则 $\sin\theta=\sqrt{3}t<0$，与 $\sin\theta\geqslant0$ 矛盾，故不存在 θ，使得 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$，D 不正确. 故选 AB.

9. $(-1,-2)$(答案不唯一) 【解析】向量 $\boldsymbol{n}$ 只要满足 $n=(\lambda,2\lambda)(\lambda<0)$ 即可，当 $\lambda=-1$ 时，$\boldsymbol{n}=(-1,-2)$.

10. $\left(5,\frac{10}{3}\right)$ 【解析】由题意可得 $\overrightarrow{MN}=3\overrightarrow{MP}$，设 $P(x,y)$，则 $(-6,-14)=3(x-7,y-8)$，即 $\begin{cases}-6=3(x-7),\\ -14=3(y-8),\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=5,\\ y=\frac{10}{3},\end{cases}$ 故 $P\left(5,\frac{10}{3}\right)$.

11. $2\sqrt{3}$ 【解析】因为 $\boldsymbol{a}=(2,0)$，$\boldsymbol{b}=(1,\sqrt{3})$，所以 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(3,\sqrt{3})$，所以 $|\boldsymbol{a}|=2$，$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=2\sqrt{3}$，所以 $\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\rangle=\frac{2\times3+0\times\sqrt{3}}{2\times2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，因为 $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\rangle\in[0,\pi]$，所以 $\sin\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\rangle=\frac{1}{2}$，所以 $|\boldsymbol{a}*(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})|=2\times2\sqrt{3}\times\frac{1}{2}=2\sqrt{3}$.

12. 1 【解析】在平行四边形 $ABCD$ 中，$AB=4$，$AD=\sqrt{5}$，$\angle BAD$ 为锐角，且 $\sin\angle BAD=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，所以 $\cos\angle BAD=\sqrt{1-\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{5}$，建立平面直角坐标系，如图所示，因为 $\sin\angle BAD=\frac{y_D}{AD}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，所以 $y_D=2$，因为 $\cos\angle BAD=\frac{x_D}{AD}=\frac{\sqrt{5}}{5}$，所以 $x_D=1$，则 $D(1,2)$. 又由题意得 $A(0,0)$，$B(4,0)$，$C(5,2)$，设 $P(m,2)$，$1\leqslant m\leqslant5$，则 $\overrightarrow{PA}=(-m,-2)$，$\overrightarrow{PB}=(4-m,-2)$，所以 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=-m(4-m)+4=m^2-4m+4=(m-2)^2$，当 $m=2$ 时，$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$ 取得最小值 0，此时 $P(2,2)$，故若 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}\geqslant\overrightarrow{P_0A}\cdot\overrightarrow{P_0B}$ 恒成立，则 $P_0(2,2)$，所以 $|\overrightarrow{P_0D}|=2-1=1$.



13. **解**：(1)因为 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，所以 $k(k-1)-1\times(k+3)=0$，解得 $k=$

-1 或 $k=3$.

(2)因为 $\boldsymbol{a}\perp(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$,所以 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=0$,即 $\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$,所以 $k^2+1=k(k+3)+1\times(k-1)$,解得 $k=\frac{1}{2}$,

此时 $\boldsymbol{a}=\left(\frac{1}{2},1\right)$,$\boldsymbol{b}=\left(\frac{7}{2},-\frac{1}{2}\right)$.

①因为 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\frac{1}{2}\times\frac{7}{2}-1\times\frac{1}{2}=\frac{5}{4}$,$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+1^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}$,$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$,

所以 $\cos\theta=\dfrac{\frac{5}{4}}{\frac{\sqrt{5}}{2}\times\frac{5\sqrt{2}}{2}}=\frac{\sqrt{10}}{10}$.

②因为 $2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(1,2)+\left(\frac{7}{2},-\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{9}{2},\frac{3}{2}\right)$,

所以 $|2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{\frac{81}{4}+\frac{9}{4}}=\frac{3\sqrt{10}}{2}$.

14. **解**:(1)由题意得 $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=(x+4,y-2)$,$\overrightarrow{BC}=(x,y)$,因为 $\overrightarrow{BC}/\!/\overrightarrow{AD}$,所以 $(x+4)y-(y-2)x=0$,可得 $x+2y=0$.

(2)由题意得 $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=(x+6,y+1)$,$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=(x-2,y-3)$,因为 $\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{BD}$,所以 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=0$,即 $(x+6)(x-2)+(y+1)(y-3)=0$,整理得 $x^2+y^2+4x-2y-15=0$.

由 $\begin{cases}x^2+y^2+4x-2y-15=0,\\x+2y=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=2,\\y=-1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=-6,\\y=3.\end{cases}$

记四边形 $ABCD$ 的面积为 S. 当 $\begin{cases}x=2,\\y=-1\end{cases}$ 时,$\overrightarrow{AC}=(8,0)$,$\overrightarrow{BD}=(0,-4)$,则 $S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{BD}|=\frac{1}{2}\times8\times4=16$;

当 $\begin{cases}x=-6,\\y=3\end{cases}$ 时,$\overrightarrow{AC}=(0,4)$,$\overrightarrow{BD}=(-8,0)$,

则 $S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{BD}|=\frac{1}{2}\times4\times8=16$.

综上,$\begin{cases}x=2,\\y=-1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=-6,\\y=3,\end{cases}$ 四边形 $ABCD$ 的面积为 16.

15. **解**:(1)设 $D(t,0)(0\leqslant t\leqslant1)$,由题意知 $C\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$,则 $\overrightarrow{OC}=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$,$\overrightarrow{OD}=(t,0)$,

所以 $\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+t,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$,

所以 $|\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}|^2=\left(t-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}$,

故当 $t=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时,$|\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}|$ 取得最小值,最小值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(2)由题意得 $C(\cos\theta,\sin\theta)$,

则 $\boldsymbol{m}=\overrightarrow{BC}=(\cos\theta+1,\sin\theta)$,

因为 $\boldsymbol{n}=(1-\cos\theta,\sin\theta-2\cos\theta)$,所以 $\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}=1-\cos^2\theta+\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta=1-\cos2\theta-\sin2\theta=1-\sqrt{2}\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{4}\right)$. 因为 $\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$,所以 $2\theta+\frac{\pi}{4}\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right]$,

所以当 $2\theta+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$,即 $\theta=\frac{\pi}{8}$ 时,$\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{4}\right)$ 取得最大值 1,$\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}$ 取得最小值 $1-\sqrt{2}$.

6.4 平面向量的应用

6.4.1 平面几何中的向量方法

6.4.2 向量在物理中的应用举例

1. D **[解析]** 他顺风行驶时的速度的大小为 $|\boldsymbol{v}_1|+|\boldsymbol{v}_2|$.
2. D **[解析]** 由物理知识知 $\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2+\boldsymbol{F}_3+\boldsymbol{F}_4=\boldsymbol{0}$,故 $\boldsymbol{F}_4=-(\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2+\boldsymbol{F}_3)=(1,2)$.
3. C **[解析]** $\because\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=0$,$\therefore AC\perp BD$,$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 的面积 $S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{BD}|=\frac{1}{2}\times\sqrt{5}\times2\sqrt{5}=5$.
4. C **[解析]** 因为 $|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}|=|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}|$,所以 $(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD})^2=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})^2$,即 $\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AD}^2-2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AD}^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$,整理可得 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=0$,易知 $\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{AD}$ 均为非零向量,则 $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AD}$,因为 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\boldsymbol{0}$,所以 $AB/\!/CD$ 且 $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{CD}|$,所以四边形 $ABCD$ 为矩形. 故选 C.
5. A **[解析]** 设每根绳子的拉力大小为 T,礼物的质量为 m,则根据题意可得 $8T\cdot\cos30^\circ=mg$,解得 $T=\frac{mg}{4\sqrt{3}}=\frac{1\times9.8}{4\sqrt{3}}\approx1.41$,所以降落伞在匀速下落的过程中每根绳子的拉力大小最接近 1.4 N. 故选 A.
6. A **[解析]** 因为 $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=|\overrightarrow{OB}|\cdot|\overrightarrow{OC}|\cdot\cos\angle BOC=2\cos\angle BOC=-1$,所以 $\cos\angle BOC=-\frac{1}{2}$,所以 $\angle BOC=\frac{2\pi}{3}$,所以 $A=\frac{\pi}{3}$. 故选 A.
7. C **[解析]** 由平面内 $\triangle ABC$ 及一点 O 满足 $\frac{\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}=\frac{\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}$,可得 $\overrightarrow{AO}\cdot\left(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}-\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}\right)=0$,所以 O 在 $\angle CAB$ 的平分线上,又由 $\frac{\overrightarrow{CO}\cdot\overrightarrow{CA}}{|\overrightarrow{CA}|}=\frac{\overrightarrow{CO}\cdot\overrightarrow{CB}}{|\overrightarrow{CB}|}$,可得 $\overrightarrow{CO}\cdot\left(\frac{\overrightarrow{CA}}{|\overrightarrow{CA}|}-\frac{\overrightarrow{CB}}{|\overrightarrow{CB}|}\right)=0$,所以 O 在 $\angle ACB$ 的平分线上,则点 O 是 $\triangle ABC$ 的内心,故选 C.
8. ABC **[解析]** 对于 A,若四边形 $ABCD$ 为正方形,点 O 是正方形 $ABCD$ 的中心,则必有 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\boldsymbol{0}$,但反过来,由 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\boldsymbol{0}$ 推不出四边形 $ABCD$ 为正方形,故 A 中结论错误. 对于 B,C,D,设 AB,CD 的中点分别为 E,F,连接 OE,OF,由向量加法的平行四边形法则知 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=2\overrightarrow{OE}$,$\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=2\overrightarrow{OF}$,$\therefore\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF}=\boldsymbol{0}$,即 O 是 EF 的中点;同理,设 AD,BC 的中点分别为 M,N,连接 OM,ON,由向量加法的平行四边形法则知 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OD}=2\overrightarrow{OM}$,$\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OB}=2\overrightarrow{ON}$,即 O 是 MN 的中点. 所以 O 是 EF,MN 的交点,故 B,C 中结论错误,D 中结论正确. 故选 ABC.
9. BD **[解析]** 设水流速度的大小为 $|\boldsymbol{v}_1|$,船实际速度的大小为 $|\boldsymbol{v}_2|$,两岸间的垂直距离为 s,船垂直到达对岸时,$|\boldsymbol{v}_2|=\sqrt{|\boldsymbol{v}|^2-|\boldsymbol{v}_1|^2}$,则所用时间 $t=\frac{s}{|\boldsymbol{v}_2|}$,当船速 $\boldsymbol{v}$ 的方向与河岸垂直时,所用时间 $t=\frac{s}{|\boldsymbol{v}|}$,$\because|\boldsymbol{v}|\geqslant|\boldsymbol{v}_2|$,$\therefore$ 当船速 $\boldsymbol{v}$ 的方向与河岸垂直时,用时最少,且沿不同直线航行到达对岸的时间不相同,故 A,C 错误;B 正确. 对于 D,船垂直到达对岸时,航行的距离为两岸间的垂直距离,此时距离最短,D 正确. 故选 BD.
10. $-\frac{5}{2}$ **[解析]** 由 $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{5}$,可知 $\triangle ABC$ 为等边三角形,所以 $\angle ACB=60^\circ$,故 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CB}=-\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=-|\overrightarrow{CA}|\cdot|\overrightarrow{CB}|\cdot\cos\angle ACB=-\frac{5}{2}$.
11. 17 **[解析]** 因为 $A(-1,-2)$,$B(1,1)$,所以 $\overrightarrow{AB}=(2,3)$,又 $\boldsymbol{F}=(4,3)$,所以 $\boldsymbol{F}$ 对冰球所做的功 $W=|\boldsymbol{F}||\overrightarrow{AB}|\cos\langle\boldsymbol{F},\overrightarrow{AB}\rangle=\boldsymbol{F}\cdot\overrightarrow{AB}=2\times4+3\times3=17$.
12. $\frac{1}{3}\boldsymbol{b}-\frac{1}{3}\boldsymbol{a}$ **[解析]** $\because CD$ 平分 $\angle ACB$,$\therefore\frac{BD}{AD}=\frac{BC}{AC}=2$,$\therefore\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$,又 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$,$\therefore\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}\boldsymbol{b}-\frac{1}{3}\boldsymbol{a}$.

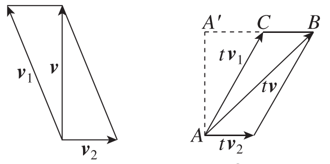
13. **证明**:设 $\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}$,则 $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$. 因为 $\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AD}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}-\boldsymbol{a}=\frac{1}{4}\boldsymbol{b}-\frac{3}{4}\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{FB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AF}=\boldsymbol{b}-\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{4}\boldsymbol{b}-\frac{3}{4}\boldsymbol{a}$,所以 $\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{FB}$. 又 D,E,F,B 四点不共线,所以四边形 $DEBF$ 是平行四边形.

14. **解**:设游船的实际速度为 $\boldsymbol{v}$.

(1)由 $AA'=1$ km,6 min $=0.1$ h,得 $|\boldsymbol{v}|=10$ km/h,由题知 $|\boldsymbol{v}_2|=4$ km/h.

如图①所示,由 $|\boldsymbol{v}_1|^2=|\boldsymbol{v}|^2+|\boldsymbol{v}_2|^2=10^2+4^2=116$,得 $|\boldsymbol{v}_1|=2\sqrt{29}$ km/h,则 $\cos\theta=-\frac{|\boldsymbol{v}_2|}{|\boldsymbol{v}_1|}=-\frac{2\sqrt{29}}{29}$,

所以 $\boldsymbol{v}_1$ 的大小为 $2\sqrt{29}$ km/h,$\cos\theta$ 的值为 $-\frac{2\sqrt{29}}{29}$.



① ②

(2)当 $\theta=60°$,$|\boldsymbol{v}_1|=10$ km/h 时,设游船到达北岸 B 点所用时间为 t h,如图②所示,

则 $\overrightarrow{AB}^2=|t\boldsymbol{v}|^2=t^2(\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2)^2=t^2(10^2+4^2+2\times10\times4\times\cos60°)=156t^2$,所以 $|\overrightarrow{AB}|=2\sqrt{39}t$ km.

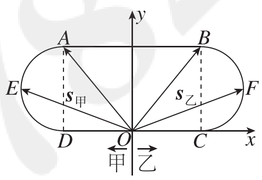
在 Rt$\triangle AA'C$ 中,由 $t|\boldsymbol{v}_1|\cos30°=1$,得 $t=\frac{1}{5\sqrt3}$ h,

因此 $|\overrightarrow{AB}|=\frac{1}{5\sqrt3}\times2\sqrt{39}=\frac{2\sqrt{13}}{5}$(km),

故游船的实际航程为 $\frac{2\sqrt{13}}{5}$ km.

15. B **[解析]** 设点 O 到 AB,BC,CA 的距离分别为 h_1,h_2,h_3,则 $S_{\triangle OBC}=\frac12a\cdot h_2$,$S_{\triangle OAC}=\frac12b\cdot h_3$,$S_{\triangle OAB}=\frac12c\cdot h_1$,因为 $S_{\triangle OBC}\cdot\overrightarrow{OA}+S_{\triangle OAC}\cdot\overrightarrow{OB}+S_{\triangle OAB}\cdot\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{0}$,所以 $\frac12a\cdot h_2\cdot\overrightarrow{OA}+\frac12b\cdot h_3\cdot\overrightarrow{OB}+\frac12c\cdot h_1\cdot\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{0}$,即 $a\cdot h_2\cdot\overrightarrow{OA}+b\cdot h_3\cdot\overrightarrow{OB}+c\cdot h_1\cdot\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{0}$,又 $a\cdot\overrightarrow{OA}+b\cdot\overrightarrow{OB}+c\cdot\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{0}$,所以 $h_1=h_2=h_3$,所以 O 为 $\triangle ABC$ 的内心. 故选 B.

16. **解**:(1)如图,以点 O 为坐标原点,CD 所在直线为 x 轴,建立平面直角坐标系,当甲到达 $\overset{\frown}{AD}$ 的中点 E 时,乙到达 $\overset{\frown}{BC}$ 的中点 F,则 $E(-80,30)$,$F(80,30)$,$\boldsymbol{s}_甲=\overrightarrow{OE}=(-80,30)$,$\boldsymbol{s}_乙=\overrightarrow{OF}=(80,30)$,$\therefore\boldsymbol{s}_甲\cdot\boldsymbol{s}_乙=(-80,30)\cdot(80,30)=-6400+900=-5500$.



(2)$\overset{\frown}{AD}$ 和 $\overset{\frown}{BC}$ 的长度均为 $\pi\times30=90$(m),20 s 后甲、乙的路程均为 $20\times7=140$(m),易知此时甲在点 A 处,乙在点 B 处,$\therefore\boldsymbol{s}_甲=\overrightarrow{OA}=(-50,60)$,$\boldsymbol{s}_乙=\overrightarrow{OB}=(50,60)$. 设 $\boldsymbol{s}_甲,\boldsymbol{s}_乙$ 的夹角为 θ,则 $\cos\theta=\frac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}|\cdot|\overrightarrow{OB}|}=\frac{1100}{6100}=\frac{11}{61}$,故 20 s 后 $\boldsymbol{s}_甲,\boldsymbol{s}_乙$ 的夹角的余弦值为 $\frac{11}{61}$.

6.4.3 余弦定理、正弦定理

1.余弦定理

1. D **[解析]** 在 $\triangle ABC$ 中,由余弦定理得 $AB^2=AC^2+BC^2-2AC\cdot BC\cdot\cos C=5^2+3^2-2\times5\times3\times\left(-\frac12\right)=49$,所以 $AB=7$. 故选 D.

2. D **[解析]** 由余弦定理得 $\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$,即 $\frac{a^2+3^2-(\sqrt3)^2}{6a}=\frac{\sqrt3}{2}$,整理得 $a^2-3\sqrt3a+6=0$,解得 $a=\sqrt3$ 或 $a=2\sqrt3$. 故选 D.

3. C **[解析]** 三角形的三边长分别为 3,5,7,则边长为 7 的边所对的角最大,该角的余弦值为 $\frac{9+25-49}{2\times3\times5}=-\frac12$,$\therefore$ 最大的角为 $\frac{2\pi}{3}$. 故选 C.

4. A **[解析]** 因为 $2a\cos B=c$,所以由余弦定理得 $2a\cdot\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=c$,整理得 $a^2=b^2$,所以 $a=b$,所以 $\triangle ABC$ 一定是等腰三角形. 故选 A.

5. A **[解析]** 由 $(a+b-c)(a+b+c)=a^2+2ab+b^2-c^2=ab$,得 $a^2+b^2-c^2=-ab$,故 $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=-\frac12$,又 $C\in(0°,180°)$,所以 $C=120°$. 故选 A.

6. C **[解析]** 由 $a=c-2a\cos B$ 得 $a=c-2a\cdot\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$,整理得 $ac=b^2-a^2$,又 $c=5$,$3a=2b$,$\therefore\frac{10b}{3}=b^2-\frac{4b^2}{9}$,解得 $b=6$ 或 $b=0$(舍去). 故选 C.

7. B **[解析]** 因为 $a^2=b^2+c^2-bc$,所以 $bc=b^2+c^2-a^2$,则 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac12$,又因为 $0<A<\pi$,所以 $A=\frac{\pi}{3}$,又因为 $B=\frac12A=\frac{\pi}{6}$,所以 $C=\pi-A-B=\frac{\pi}{2}$,所以 $\triangle ABC$ 为直角三角形. 故选 B.

8. BC **[解析]** 由题意可知,C 为钝角,则 $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}<0$,即 $c^2>a^2+b^2=10$,即 $c>\sqrt{10}$,又 $c<a+b=3\sqrt2$,所以 $\sqrt{10}<c<3\sqrt2$. 故选 BC.

9. AC **[解析]** 由余弦定理,得 $AC^2=BC^2+BA^2-2BC\cdot BA\cdot\cos B$,即 $3=BC^2+9-2BC\times3\times\frac{\sqrt3}{2}$,解得 $BC=\sqrt3$ 或 $BC=2\sqrt3$. 当 $BC=\sqrt3$ 时,$BC=AC$,此时 $\triangle ABC$ 为等腰三角形,所以 $A=B=\frac{\pi}{6}$;当 $BC=2\sqrt3$ 时,$AB^2+AC^2=BC^2$,此时 $\triangle ABC$ 为直角三角形,$A=\frac{\pi}{2}$. 故选 AC.

10. $\frac34$ **[解析]** 因为 $b^2=ac$,且 $c=2a$,所以 $b^2=2a^2$,由余弦定理得 $\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{a^2+4a^2-2a^2}{2a\cdot2a}=\frac34$.

11. (2,4) **[解析]** 由 $a=c-1$,$b=c+1$,得 $b>c>a$,所以 $c+c-1>c+1$,解得 $c>2$. 由 $\triangle ABC$ 为钝角三角形,得 $\cos B<0$,即 $\frac{c^2+(c-1)^2-(c+1)^2}{2c(c-1)}<0$,整理得 $c^2-4c<0$,所以 $2<c<4$,故 c 的取值范围为(2,4).

12. $-\frac{29}{2}$ **[解析]** 因为 $a=2,b=3,c=4$,所以 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}=ac\cos(\pi-B)+ab\cos(\pi-C)+bc\cos(\pi-A)=-ac\cos B-ab\cos C-bc\cos A=-ac\cdot\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}-ab\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}-bc\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=-\frac12(a^2+c^2-b^2+a^2+b^2-c^2+b^2+c^2-a^2)=-\frac12(a^2+b^2+c^2)=-\frac12\times(2^2+3^2+4^2)=-\frac{29}{2}$.

13. **解**:(1)$\because a:b:c=2:\sqrt6:(\sqrt3+1)$,$\therefore$ 设 $a=2x$,$b=\sqrt6x$,$c=(\sqrt3+1)x\ (x>0)$. 由余弦定理可得 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{6x^2+(\sqrt3+1)^2x^2-4x^2}{2\times\sqrt6\times(\sqrt3+1)x^2}=\frac{\sqrt2}{2}$.

由 $0°<A<180°$,可得 $A=45°$.

同理可得 $\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{4x^2+(\sqrt3+1)^2x^2-6x^2}{2\times2\times(\sqrt3+1)x^2}=$

$\frac{1}{2}$，由 $0°<B<135°$，可得 $B=60°$，

$\therefore C=180°-45°-60°=75°$.

(2)由余弦定理得 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B=(2\sqrt{3})^2+(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2-2\times2\sqrt{3}\times(\sqrt{6}+\sqrt{2})\times\cos45°=8$，$\therefore b=2\sqrt{2}$，则 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{8+(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2-(2\sqrt{3})^2}{2\times2\sqrt{2}\times(\sqrt{6}+\sqrt{2})}=\frac{1}{2}$，又 $0°<A<135°$，$\therefore A=60°$，则 $C=180°-(A+B)=75°$.

14. **解**:(1)因为 $(a-c)(a+c)=b(b-c)$，所以 $a^2-c^2=b^2-bc$，即 $b^2+c^2-a^2=bc$，所以 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{bc}{2bc}=\frac{1}{2}$，

又 $A\in(0,\pi)$，所以 $A=\frac{\pi}{3}$.

(2)在△ABC 中，由余弦定理得 $a^2=(\sqrt{3})^2=3=b^2+c^2-bc=(b+c)^2-3bc=12-3bc$，所以 $bc=3$，

又 $b+c=2\sqrt{3}$，所以 $b=c=\sqrt{3}$，

所以 $a=b=c=\sqrt{3}$，所以△ABC 是等边三角形.

15. $2\sqrt{3}$ 【解析】由题意分别设 BC，AB 边上的高为 m，n，则由三角形面积相等可得 $\frac{1}{2}\times m\times a=\frac{1}{2}\times n\times c$，所以 $\frac{m}{n}=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，则 $a=\sqrt{3}c$①，在△ABD 中，$B=30°$，$BD=\frac{1}{3}BC=\frac{1}{3}a$，$AD=2$，由余弦定理可得 $AD^2=AB^2+BD^2-2AB\cdot BD\cos B$，即 $4=c^2+\frac{1}{9}a^2-2\times c\times\frac{1}{3}a\times\frac{\sqrt{3}}{2}$②，由①②可得 $c=2\sqrt{3}$，$a=6$，所以在△ABC 中，由余弦定理可得 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B=36+12-2\times2\sqrt{3}\times6\times\frac{\sqrt{3}}{2}=12$，故 $b=2\sqrt{3}$.

16. **解**:(1)证明:在△ABC 中，由余弦定理可得，右边 $=b\cos C+c\cos B=b\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}+c\cdot\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{a^2+b^2-c^2}{2a}+\frac{a^2+c^2-b^2}{2a}=\frac{2a^2}{2a}=a=$ 左边，$\therefore a=b\cos C+c\cos B$.

(2)设△ABC 的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，

由 $\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}}{3}=\frac{\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}}{2}=\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}$，得 $\frac{-ac\cos B}{3}=\frac{-ab\cos C}{2}=-bc\cos A$，即 $\frac{ac\cos B}{3}=\frac{ab\cos C}{2}=bc\cos A$，

由余弦定理得 $\frac{a^2+c^2-b^2}{6}=\frac{a^2+b^2-c^2}{4}=\frac{b^2+c^2-a^2}{2}$，

令 $\frac{a^2+c^2-b^2}{6}=\frac{a^2+b^2-c^2}{4}=\frac{b^2+c^2-a^2}{2}=t(t>0)$，

则 $\begin{cases}a^2+c^2-b^2=6t,\\a^2+b^2-c^2=4t,\\b^2+c^2-a^2=2t,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a^2=5t,\\b^2=3t,\\c^2=4t,\end{cases}$

$\therefore\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{3t+4t-5t}{2\times\sqrt{3t}\times\sqrt{4t}}=\frac{2t}{4\sqrt{3}t}=\frac{\sqrt{3}}{6}$.

2. 正弦定理

第 1 课时　正弦定理

1. C 【解析】由正弦定理得 $\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$，所以 $\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin C}{c}$.

2. A 【解析】由正弦定理得 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，则 $b=\frac{a\sin B}{\sin A}=\frac{\sqrt{3}\times\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=1$. 故选 A.

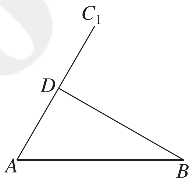
3. C 【解析】设△ABC 的外接圆半径为 R，由正弦定理得 $2R=\frac{BC}{\sin A}=\frac{1}{\sin30°}=2$，解得 $R=1$，所以△ABC 外接圆的直径为 $2R=2$. 故选 C.

4. A 【解析】由正弦定理得 $\frac{3\sin A\sin B-\sin^2B}{\sin^2A}=\frac{3ab-b^2}{a^2}=\frac{6b^2-b^2}{4b^2}=\frac{5}{4}$. 故选 A.

5. C 【解析】由正弦定理得 $\frac{AB}{\sin C}=\frac{AC}{\sin B}$，即 $\frac{2}{\sin\frac{\pi}{6}}=\frac{2\sqrt{2}}{\sin B}$，可得 $\sin B=\frac{\sqrt{2}}{2}$，又 $0<B<\frac{5\pi}{6}$，所以 $B=\frac{\pi}{4}$ 或 $B=\frac{3\pi}{4}$. 故选 C.

6. C 【解析】设△ABC 的内角 A，B 所对的边分别为 a，b，$\frac{a}{\sin A}=k(k>0)$，则由正弦定理得 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=k$，即 $\sin A=\frac{a}{k}$，$\sin B=\frac{b}{k}$，由 $\sin A>\sin B$，得 $\frac{a}{k}>\frac{b}{k}$，即 $a>b$，由大边对大角得 $A>B$；当 $A>B$ 时，$a>b$，即 $\frac{a}{k}>\frac{b}{k}$，由正弦定理得 $\sin A>\sin B$. 因此“$\sin A>\sin B$”是“$A>B$”的充要条件，故选 C.

7. B 【解析】如图，点 C 在射线 AC_1 上移动，从点 B 向射线 AC_1 作垂线，垂足为 D，由题意可知 $BD=AB\sin A=\sqrt{3}$，若满足条件的三角形有两个，则由图可知 $BD<BC<BA$，即 $\sqrt{3}<BC<2$，所以 BC 的取值范围是 $(\sqrt{3},2)$. 故选 B.



8. BCD 【解析】对于 A，$\frac{1}{\sin30°}=2\neq\frac{\frac{3}{2}}{\sin45°}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$，不满足正弦定理，故 A 不可能成立；对于 B，由 $\cos C=-\frac{4}{5}$ 可得 $\sin C=\frac{3}{5}$，所以 $\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}=10$，故 B 可能成立；对于 C，若 $A=2B$，则 $\sin A=\sin2B=2\sin B\cos B$，即 $a=2b\cos B$，又因为 $a=\frac{3}{2}b$，所以 $\cos B=\frac{3}{4}$，故 C 可能成立；因为 $a+b+c=2R(\sin A+\sin B+\sin C)$（$R$ 为△ABC 外接圆的半径），所以当△ABC 的外接圆半径 $R=\frac{1}{2}$ 时等式成立，故 D 可能成立. 故选 BCD.

9. AB 【解析】对于 A，由正弦定理得 $\frac{1}{\sin30°}=\frac{4}{\sin B}$，则 $\sin B=2$，显然角 B 不存在，故 A 正确；对于 B，在△ABC 中，由 $A>B$ 知 $a>b$，根据正弦定理可得 $\sin A>\sin B$，故 B 正确；对于 C，由正弦定理知 $a=2R\sin A$，$b=2R\sin B$（R 为△ABC 外接圆的半径），又 $a\cos A=b\cos B$，所以 $2R\sin A\cos A=2R\sin B\cos B$，可得 $\sin2A=\sin2B$，故 $2A=2B$ 或 $2A+2B=\pi$，即△ABC 是等腰三角形或直角三角形，故 C 错误；对于 D，在△ABC 中，设△ABC 的外接圆半径是 R，则根据正弦定理可得 $2R=\frac{a}{\sin A}=\frac{2}{\frac{1}{2}}=4$，解得 $R=2$，故 D 错误. 故选 AB.

10. $\frac{73}{6}$ 【解析】由题意知△ABC 外接圆的半径 $R=3$，由正弦定理可得 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R=6$，则有 $\frac{2b}{\sin B}=12$，$\frac{\sin C}{c}=\frac{1}{6}$，所以 $\frac{2b}{\sin B}+\frac{\sin C}{c}=12+\frac{1}{6}=\frac{73}{6}$.

11. $\{2\}\cup[2\sqrt{2},+\infty)$ 【解析】由正弦定理得 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，则 $\frac{a}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{2\sqrt{2}}{\sin B}$，所以 $\sin B=\frac{2}{a}$. 因为 $A=\frac{\pi}{4}$，所以 $0<B<\frac{3\pi}{4}$，

又因为 c 只有一解，所以 $\sin B=\frac{2}{a}\in\{1\}\cup\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$，即 a 的取值范围为 $\{2\}\cup[2\sqrt{2},+\infty)$.

12. $\frac{\pi}{4}$ 【解析】由 $a\sin B+b\cos A=c$ 及正弦定理可得 $\sin A\sin B+\sin B\cos A=\sin C$,又 $\sin C=\sin[\pi-(A+B)]=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$,所以 $\sin A\sin B=\sin A\cos B$,又 $A\in(0,\pi)$,所以 $\sin A>0$,所以 $\sin B=\cos B$,则 $\tan B=1$,因为 $B\in(0,\pi)$,所以 $B=\frac{\pi}{4}$.

13. **解**:$\because \frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$,$\therefore a=\frac{c\sin A}{\sin C}=\frac{10\sin 45^\circ}{\sin 30^\circ}=10\sqrt{2}$.
易得 $B=180^\circ-(A+C)=180^\circ-(45^\circ+30^\circ)=105^\circ$,
$\because \frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$,$\therefore b=\frac{c\sin B}{\sin C}=\frac{10\sin 105^\circ}{\sin 30^\circ}=20\sin 75^\circ=20\times\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}=5\sqrt{6}+5\sqrt{2}$.

14. **解**:(1)由正弦定理得 $\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$,即 $\frac{\sqrt{2}}{\sin 30^\circ}=\frac{2}{\sin C}$,
故 $\sin C=\frac{\sqrt{2}}{2}$,可得 $C=45^\circ$ 或 $C=135^\circ$,经检验,均满足题意.
(2)若角 C 为锐角,由(1)可知 $C=45^\circ$,故 $A=180^\circ-45^\circ-30^\circ=105^\circ$,其中 $\sin 105^\circ=\sin(60^\circ+45^\circ)=\sin 60^\circ\cos 45^\circ+\cos 60^\circ\sin 45^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$,由正弦定理得 $\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$,即 $\frac{a}{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}=\frac{2}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$,解得 $a=\sqrt{3}+1$.

15. D 【解析】因为 $\boldsymbol{m}/\!/\boldsymbol{n}$,所以 $\cos A\cdot(\sqrt{2}c-b)=a\cos B$,由正弦定理得 $\cos A(\sqrt{2}\sin C-\sin B)=\sin A\cos B$,即 $\sqrt{2}\sin C\cos A-\sin B\cos A=\sin A\cos B$,所以 $\sqrt{2}\sin C\cos A=\sin A\cos B+\sin B\cos A=\sin(A+B)=\sin C$,因为 $0<C<\pi$,所以 $\sin C>0$,所以 $\sqrt{2}\cos A=1$,故 $\cos A=\frac{\sqrt{2}}{2}>0$,所以 $\triangle ABC$ 的内角 A 为锐角,所以 $A=\frac{\pi}{4}$. 故选 D.

16. **解**:(1)因为 $a\sin\frac{A+C}{2}=b\sin A$,
所以由正弦定理得 $\sin A\sin\frac{A+C}{2}=\sin B\sin A$,
又因为 $\sin A\neq 0$,所以 $\sin\frac{A+C}{2}=\sin B$.
由 $A+B+C=\pi$,可得 $\sin\frac{A+C}{2}=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{B}{2}\right)=\cos\frac{B}{2}$,
所以 $\cos\frac{B}{2}=\sin B$,所以 $\cos\frac{B}{2}=2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}$.
因为 $B\in(0,\pi)$,所以 $\frac{B}{2}\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,所以 $\cos\frac{B}{2}>0$,
所以 $\sin\frac{B}{2}=\frac{1}{2}$,
因为 $\frac{B}{2}\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,所以 $\frac{B}{2}=\frac{\pi}{6}$,即 $B=\frac{\pi}{3}$.
(2)因为 $\triangle ABC$ 为锐角三角形,
所以 $0<A<\frac{\pi}{2}$,$0<C<\frac{\pi}{2}$,
由(1)知,$A+C=\frac{2\pi}{3}$,即 $\begin{cases}0<\frac{2\pi}{3}-C<\frac{\pi}{2},\\0<C<\frac{\pi}{2},\end{cases}$ 所以 $\frac{\pi}{6}<C<\frac{\pi}{2}$,
即角 C 的取值范围为 $\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right)$.

第 2 课时 正弦定理和余弦定理的综合问题

1. C 【解析】由题意及正弦定理可得 $8a=5c$,令 $a=5k$,则 $b=7k$,$c=8k$,所以 $\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{25k^2+64k^2-49k^2}{2\times5k\times8k}=\frac{1}{2}$,因为 $B\in(0^\circ,180^\circ)$,所以 $B=60^\circ$. 故选 C.

2. B 【解析】设 $\triangle ABC$ 的内角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c,由正弦定理可知,$a:b:c=3:4:6$,设 $a=3k$,$b=4k$,$c=6k$,则由余弦定理得 $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{25k^2-36k^2}{24k^2}=-\frac{11}{24}$. 故选 B.

3. B 【解析】方法一:因为 $a\cos B+b\cos A=a$,所以 $a\times\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}+b\times\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=a$,整理得 $c=a$,所以 $\triangle ABC$ 是等腰三角形,由已知条件不能判断 $\triangle ABC$ 是否为直角三角形. 故选 B.
方法二:由 $a\cos B+b\cos A=a$ 及正弦定理,得 $\sin A\cos B+\sin B\cos A=\sin A$,即 $\sin(A+B)=\sin A$,因为 $0<A<\pi$,$0<B<\pi$,$A+B+C=\pi$,所以 $\sin(\pi-C)=\sin A$,即 $\sin C=\sin A$,所以 $A=C$ 或 $A+C=\pi$(舍去),所以 $\triangle ABC$ 是等腰三角形,由已知条件不能判断 $\triangle ABC$ 是否为直角三角形. 故选 B.

4. D 【解析】由正弦定理可得,$2BC=3AC$,又 $AB=2AC$,所以 $AC:BC:AB=2:3:4$,不妨设 $AC=2k$,$BC=3k$,$AB=4k$,由余弦定理得 $\cos C=\frac{4k^2+9k^2-16k^2}{2\times2k\times3k}=-\frac{1}{4}$. 故选 D.

5. D 【解析】因为 $c\sin C-a\sin A=4b\sin B$,所以由正弦定理得 $c^2-a^2=4b^2$,即 $c^2=a^2+4b^2$,又 $\cos C=-\frac{1}{5}$,则 $\cos C=-\frac{1}{5}=\frac{a^2+b^2-(a^2+4b^2)}{2ab}$,化简得 $\frac{a}{b}=\frac{15}{2}$. 故选 D.

6. B 【解析】由 $\sin^2\frac{A}{2}=\frac{c-b}{2c}$,得 $\frac{1-\cos A}{2}=\frac{\sin C-\sin B}{2\sin C}$,即 $(1-\cos A)\sin C=\sin C-\sin B$,即 $\cos A\sin C=\sin B=\sin(A+C)=\sin A\cos C+\cos A\sin C$,所以 $\sin A\cos C=0$. 在 $\triangle ABC$ 中,$\sin A\neq0$,所以 $\cos C=0$,$C=\frac{\pi}{2}$,即 $\triangle ABC$ 的形状为直角三角形. 故选 B.

7. C 【解析】由余弦定理得 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$,又 $a^2+c^2-b^2+2ac=2bc\sin A$,所以 $2ac\cos B+2ac=2bc\sin A$,所以 $a\cos B+a=b\sin A$,由正弦定理可得 $\sin A\cos B+\sin A=\sin B\sin A$,又 $A\in(0,\pi)$,所以 $\sin A>0$,所以 $\cos B+1=\sin B$,又 $\sin^2B+\cos^2B=1$,解得 $\cos B=0$ 或 $\cos B=-1$,又 $B\in(0,\pi)$,所以 $\cos B\in(-1,1)$,所以 $\cos B=0$,所以 $B=\frac{\pi}{2}$. 故选 C.

8. BCD 【解析】对于 A,由 $\sin 2A=\sin 2B$,得 $2A=2B$ 或 $2A+2B=\pi$,即 $A=B$ 或 $A+B=\frac{\pi}{2}$,故 $\triangle ABC$ 是等腰三角形或直角三角形,故 A 不正确;对于 B,由 $\triangle ABC$ 是锐角三角形得 $A+B>\frac{\pi}{2}$,可得 $\frac{\pi}{2}>A>\frac{\pi}{2}-B$,故根据正弦函数的性质得 $\sin A>\sin\left(\frac{\pi}{2}-B\right)=\cos B$,故 B 正确;对于 C,因为 $\sin^2A+\sin^2B+\cos^2C<1$,所以 $\sin^2A+\sin^2B<1-\cos^2C=\sin^2C$,由正弦定理得 $a^2+b^2<c^2$,由余弦定理得 $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}<0$,所以角 C 为钝角,故 $\triangle ABC$ 为钝角三角形,故 C 正确;对于 D,由正弦定理得 $\sin A=2\sin B\cos C$,而 $A+B+C=\pi$,所以 $\sin[\pi-(B+C)]=2\sin B\cos C$,即 $\sin(B+C)=2\sin B\cos C$,可得 $\sin(B-C)=0$,在三角形中必有 $B=C$,故 $\triangle ABC$ 为等腰三角形,故 D 正确 . 故选 BCD.

9. ACD 【解析】因为 $3\sin A=2\sin C$,所以由正弦定理可得 $3a=2c$,又 $a+c=2b$,故 $a=\frac{4}{5}b$,$c=\frac{6}{5}b$,设 $b=5x$,则 $a=4x$,$c=6x$. 对于 A,$\sin A:\sin B:\sin C=a:b:c=4:5:6$,故 A 正确;对于 B,根据大边对大角,得 C 为最大角,又 $a^2+b^2-c^2=16x^2+25x^2-36x^2=5x^2>0$,则 $\cos C>0$,又 $C\in(0,\pi)$,故 C 为锐角,则 $\triangle ABC$ 为锐角三角形,故 B 错误;对于 C,由 B 知 $\cos C=\frac{5x^2}{40x^2}=\frac{1}{8}$,$C$ 为锐角,故 $\sin C=$

$\sqrt{1-\cos^2 C}=\frac{\sqrt{63}}{8}=\frac{3\sqrt{7}}{8}$，又 $c=\sqrt{7}$，设 $\triangle ABC$ 外接圆的半径为 R，由正弦定理可得 $2R=\frac{c}{\sin C}=\frac{\sqrt{7}}{\frac{3\sqrt{7}}{8}}=\frac{8}{3}$，则 $R=\frac{4}{3}$，故 C 正确；对于 D，若 $\triangle ABC$ 的周长为 15，则 $a+b+c=15x=15$，则 $x=1$，故 $a=4,b=5,c=6$，设 $\triangle ABC$ 内切圆的半径为 r，则 $\frac{1}{2}(a+b+c)\cdot r=\frac{1}{2}ah=\frac{1}{2}ab\sin C$（$h$ 为边 BC 上的高），即 $\frac{1}{2}\times 15\times r=\frac{1}{2}\times 20\times\frac{3\sqrt{7}}{8}$，解得 $r=\frac{\sqrt{7}}{2}$，故 D 正确. 故选 ACD.

10. $\frac{\pi}{3}$ 【解析】由 $\frac{\sin A}{\sin B+\sin C}=\frac{b-c}{a-c}$，结合正弦定理得 $\frac{a}{b+c}=\frac{b-c}{a-c}$，则 $a^2-ac=b^2-c^2$，即 $a^2+c^2-b^2=ac$，由余弦定理得 $\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{ac}{2ac}=\frac{1}{2}$，而 $B\in(0,\pi)$，所以 $B=\frac{\pi}{3}$.

11. 直角 【解析】∵ $a^2+b^2-c^2=\frac{8}{5}ab$，∴ $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{4}{5}$，∴ $\sin C=\frac{3}{5}$. ∵ $\frac{c}{b}=\frac{3}{5}$，∴ $\sin B=1$，∴ $B=90°$，∴ $\triangle ABC$ 为直角三角形.

12. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 【解析】设 $AB=c,AC=b,BC=a$，由 $3\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}+4\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=5\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$，得 $3\times ab\times\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}+4\times ac\times\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=5bc\times\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$，即 $a^2=\frac{1}{2}b^2+\frac{1}{3}c^2$，则 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{\frac{1}{2}b^2+\frac{2}{3}c^2}{2bc}\geqslant\frac{2\sqrt{\frac{1}{2}b^2\times\frac{2}{3}c^2}}{2bc}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，当且仅当 $\frac{1}{2}b^2=\frac{2}{3}c^2$ 时取等号，即 $\cos A$ 的最小值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

13. 解：(1)在 $\triangle ABC$ 中，$a=2,c=\sqrt{3},B=30°$，由余弦定理，得 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B=4+3-2\times 2\times\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=1$，所以 $b=1$.

(2)由(1)知，$b=1$，在 $\triangle ABC$ 中，由正弦定理，得 $\frac{b}{\sin B}=\frac{a}{\sin A}$，则 $\sin A=\frac{a\sin B}{b}=\frac{2\times\frac{1}{2}}{1}=1$，
又 $0°<A<180°$，所以 $A=90°$，
所以 $C=180°-A-B=60°$.

14. 解：(1)在 $\triangle ABC$ 中，由 $2a=b+2c\cos B$ 及正弦定理，得 $2\sin A=\sin B+2\sin C\cos B$，即 $\sin B+2\sin C\cos B=2\sin(B+C)=2\sin B\cos C+2\cos B\sin C$，

整理得 $2\sin B\cos C=\sin B$，而 $\sin B>0$，则 $\cos C=\frac{1}{2}$，

又 $0<C<\pi$，所以 $C=\frac{\pi}{3}$.

(2)由(1)知，$C=\frac{\pi}{3}$，由正弦定理得 $c=4\sqrt{3}\sin C=4\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=6$，由余弦定理得 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$，即 $6^2=a^2+b^2-ab=(a+b)^2-3ab=(2\sqrt{15})^2-3ab$，解得 $ab=8$.

15. $\frac{2\pi}{3}$ $[-5,9]$ 【解析】由 $\sin^2 B+\sin^2 C-\sin^2 A+\sin B\sin C=0$ 及正弦定理，得 $b^2+c^2-a^2+bc=0$，由余弦定理可知 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=-\frac{1}{2}$，又∵ $A\in(0,\pi)$，∴ $A=\frac{2\pi}{3}$. ∵ $b=2,c=1$，∴由余弦定理得 $a=\sqrt{7}$，$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{2\sqrt{7}}{7}$，∴ $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{BC}$ 的夹角的余弦值为 $-\frac{2\sqrt{7}}{7}$. 又∵ $\overrightarrow{BP}=t\overrightarrow{BC}$，∴ $\overrightarrow{PC}=(1-t)\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BC}=(\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{BC})\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+t\overrightarrow{BC}^2=7t-2$，∴ $\overrightarrow{PC}^2-\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AP}=7(1-t)^2-(7t-2)=7t^2-21t+9$，$t\in[0,1]$，∴ $\overrightarrow{PC}^2-\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AP}\in[-5,9]$.

16. 解：∵ $2\cos 2B-8\cos B+5=0$，∴ $2(2\cos^2 B-1)-8\cos B+5=0$，∴ $4\cos^2 B-8\cos B+3=0$，即 $(2\cos B-1)(2\cos B-3)=0$，解得 $\cos B=\frac{1}{2}$ 或 $\cos B=\frac{3}{2}$（舍去）.

∵ $0<B<\pi$，∴ $B=\frac{\pi}{3}$.

∵ $a+c=2b$，∴由正弦定理得 $\sin A+\sin C=2\sin B=2\sin\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$，∴ $\sin A+\sin\left(\frac{2\pi}{3}-A\right)=\sqrt{3}$，

∴ $\sin A+\sin\frac{2\pi}{3}\cos A-\cos\frac{2\pi}{3}\sin A=\sqrt{3}$，化简得 $\frac{3}{2}\sin A+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos A=\sqrt{3}$，∴ $\sin\left(A+\frac{\pi}{6}\right)=1$.

∵ $0<A<\frac{2\pi}{3}$，∴ $\frac{\pi}{6}<A+\frac{\pi}{6}<\frac{5\pi}{6}$，∴ $A+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$，解得 $A=\frac{\pi}{3}$，∴ $C=\frac{\pi}{3}$，故 $\triangle ABC$ 是等边三角形.

第3课时 正弦定理和余弦定理的应用

1. B 【解析】$\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times 4\times 3\times\frac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$，故选 B.

2. A 【解析】在 $\triangle ABC$ 中，$A=\frac{\pi}{6}$，$AB=\sqrt{3}$，$AC=4$，所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times 4\times\sqrt{3}\times\frac{1}{2}=\sqrt{3}$，由余弦定理可得 $BC=\sqrt{3+16-2\times 4\times\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}}=\sqrt{7}$，所以 BC 边上的高为 $\frac{2\times\sqrt{3}}{\sqrt{7}}=\frac{2\sqrt{21}}{7}$. 故选 A.

3. B 【解析】由正弦定理及 $a\cos B-b\cos A=c$ 得 $\sin A\cos B-\cos A\sin B=\sin C$，又因为 $\sin C=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$，所以 $2\cos A\sin B=0$，又 $\sin B>0$，所以 $\cos A=0$，得 $A=\frac{\pi}{2}$，则 $B=\pi-\frac{\pi}{2}-\frac{2\pi}{5}=\frac{\pi}{10}$. 故选 B.

4. A 【解析】∵ $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}c=\frac{\sqrt{3}}{2}$，∴ $c=1$，∴ $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=4+1-4\cos 60°=3$，∴ $a=\sqrt{3}$. 设 $\triangle ABC$ 外接圆的半径为 R，由正弦定理得 $2R=\frac{a}{\sin A}=\frac{\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=2$，解得 $R=1$，∴ $\triangle ABC$ 外接圆的面积 $S=\pi R^2=\pi$. 故选 A.

5. C 【解析】因为 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=a^2\sin A$，所以 $bc=2a^2$，所以 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\geqslant\frac{2bc-\frac{1}{2}bc}{2bc}=\frac{3}{4}$，当且仅当 $b=c$ 时等号成立，故 $\cos A$ 的最小值为 $\frac{3}{4}$. 故选 C.

6. C 【解析】由余弦定理得 $\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{\sqrt{3}ac}{2ac}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，因为 $C=\frac{\pi}{6}$，所以 $B\in\left(0,\frac{5\pi}{6}\right)$，所以 $B=\frac{\pi}{6}$，故 $\triangle ABC$ 为等腰三角形，且 $AB=AC$. 因为 AD 为角 A 的平分线，所以 $BD=CD$，设 $BD=a$，则 $CD=a$，$BC=2a$，又 $\overrightarrow{BE}=2\overrightarrow{EC}$，所

以 $BE=\frac{2}{3}BC=\frac{4}{3}a$，故 $\frac{BE}{BD}=\frac{\frac{4}{3}a}{a}=\frac{4}{3}$. 故选 C.

7. B 【解析】作 $AD\perp BC$ 交 BC 于点 D，设 $BC=x$，则 BC 边上的高 $AD=\frac{\sqrt{3}}{6}x$，∵ $B=\frac{\pi}{3}$，∴ $AB=\frac{AD}{\sin\frac{\pi}{3}}=\frac{x}{3}$，$BD=\frac{AD}{\tan\frac{\pi}{3}}=\frac{x}{6}$，则 $DC=BC-BD=\frac{5x}{6}$，∴ $AC^2=DC^2+AD^2=\left(\frac{5x}{6}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}x}{6}\right)^2=\frac{7x^2}{9}$. 在△$ABC$ 中，由余弦定理可得 $\cos\angle BAC=\frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB\cdot AC}=\frac{\frac{x^2}{9}+\frac{7x^2}{9}-x^2}{2\cdot\frac{x}{3}\cdot\frac{\sqrt{7}x}{3}}=-\frac{\sqrt{7}}{14}$. 故选 B.

8. ABC 【解析】由余弦定理可得 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{1}{2}$，故 $b^2+c^2-bc=9\geqslant 2bc-bc=bc$，当且仅当 $b=c$ 时取等号，此时 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A\leqslant\frac{9\sqrt{3}}{4}$，易知 $S_{\triangle ABC}>0$，故 A,B,C 符合题意. 故选 ABC.

9. AB 【解析】对于 A，设△ABC 外接圆的半径为 R，由 $\frac{a}{\sin A}=\frac{7}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=2R$，可得 $R=\frac{7}{\sqrt{3}}$，所以△ABC 外接圆的面积是 $\pi R^2=\frac{49\pi}{3}$，故 A 正确；对于 B，$b\cos C+c\cos B=b\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}+c\cdot\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=a=7$，故 B 正确；对于 C，$b+c=2R(\sin B+\sin C)=\frac{14}{\sqrt{3}}\left[\sin B+\sin\left(\frac{2\pi}{3}-B\right)\right]=14\sin\left(B+\frac{\pi}{6}\right)\left(0<B<\frac{2\pi}{3}\right)$，可得 $b+c\in(7,14]$，故 $b+c$ 不可能等于 16，故 C 错误；对于 D，作 A 关于 BC 的对称点 A'，设 A 到 BC 的距离为 h，可得 $\frac{1}{2}ah=\frac{1}{2}bc\sin\frac{\pi}{3}$，即有 $h=\frac{\sqrt{3}}{14}bc$，由 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos\frac{\pi}{3}=b^2+c^2-bc\geqslant 2bc-bc$，$a=7$，可得 $bc\leqslant 49$，当且仅当 $b=c$ 时取等号，所以 $h\leqslant\frac{7\sqrt{3}}{2}$，则 AA' 的最大值是 $7\sqrt{3}$，故 D 错误. 故选 AB.

10. 3 【解析】由 $S_{\triangle ABC}=5$，得 $\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times 20\times\sin A=5$，解得 $\sin A=\frac{1}{2}$，由正弦定理得 $\frac{a}{\sin A}=2\times 3$，故 $a=\frac{1}{2}\times 2\times 3=3$.

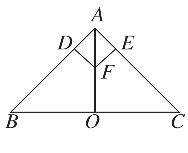
11. $\frac{15\sqrt{7}}{4}$ 【解析】因为 $2\sin C=3\sin A$，$c=a+2$，所以 $2c=2(a+2)=3a$，则 $a=4$，故 $b=5$，$c=6$，所以 $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{4^2+5^2-6^2}{2\times4\times5}=\frac{1}{8}$，则 $\sin C=\sqrt{1-\cos^2 C}=\frac{3\sqrt{7}}{8}$，故 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times4\times5\times\frac{3\sqrt{7}}{8}=\frac{15\sqrt{7}}{4}$.

12. $\frac{\pi}{6}$ 【解析】由余弦定理可得 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，所以 $\sin C=-\cos A$，即 $\cos\left(\frac{\pi}{2}+C\right)=\cos A$，又 A，C 为三角形的内角，所以 $\frac{\pi}{2}+C=A$，又因为 $A+B+C=\pi$，所以 $B=\pi-A-C=\frac{\pi}{2}-2C$，所以 $\sin B+2\sin C=\sin\left(\frac{\pi}{2}-2C\right)+2\sin C=\cos 2C+2\sin C=-2\sin^2 C+2\sin C+1$，根据二次函数的性质，可知当 $\sin C=\frac{1}{2}$ 时，$\sin B+2\sin C$ 取得最大值，此时 $C=\frac{\pi}{6}$ 或 $C=\frac{5\pi}{6}$，当 $C=\frac{5\pi}{6}$ 时，由 $\sin C=-\cos A$ 可知 $\cos A=-\frac{1}{2}$，此时 $A=\frac{2\pi}{3}$，不满足题意. 故 $C=\frac{\pi}{6}$.

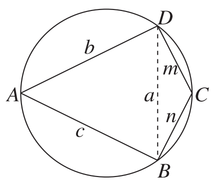
13. **解**：(1)选条件①：
在△ABC 中，因为 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=4^2+3^2-2\times4\times3\times\cos\frac{\pi}{3}=13$，所以 $a=\sqrt{13}$. 因为 $\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$，所以 $\frac{\sqrt{13}}{\sin\frac{\pi}{3}}=\frac{3}{\sin C}$，所以 $\sin C=\frac{3\sqrt{39}}{26}$.
选条件②：
在△ABC 中，因为 $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{(\sqrt{13})^2+4^2-3^2}{2\times\sqrt{13}\times4}=\frac{5\sqrt{13}}{26}$，所以 $\sin C=\sqrt{1-\cos^2 C}=\sqrt{1-\left(\frac{5\sqrt{13}}{26}\right)^2}=\frac{3\sqrt{39}}{26}$.
(2)选条件①：
因为 $A=\frac{\pi}{3}$，所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times4\times3\times\sin\frac{\pi}{3}=3\sqrt{3}$.
选条件②：
因为 $\sin C=\frac{3\sqrt{39}}{26}$，所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times\sqrt{13}\times4\times\frac{3\sqrt{39}}{26}=3\sqrt{3}$.

14. **解**：(1)在△ADC 中，由正弦定理得 $\frac{AC}{\sin\angle ADC}=\frac{DC}{\sin\angle DAC}$，所以 $\sin\angle ADC=\frac{AC\cdot\sin\angle DAC}{DC}=\sqrt{3}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$. 又 $\angle ADC=\angle ABD+\angle BAD=\angle ABD+(90°-\angle DAC)=\angle ABD+60°>60°$，所以 $\angle ADC=120°$.
(2)由 $BD=2DC$，$AC=\sqrt{3}DC$，且 $DC=1$，得 $BC=3$，$AC=\sqrt{3}$，所以在直角三角形 ABC 中，$\cos C=\frac{AC}{BC}=\frac{\sqrt{3}}{3}$. 在△$ADC$ 中，由余弦定理得 $AD^2=AC^2+DC^2-2AC\cdot DC\cos C=(\sqrt{3})^2+1-2\times\sqrt{3}\times1\times\frac{\sqrt{3}}{3}=2$，所以 $AD=\sqrt{2}$.

15. D 【解析】如图所示，在边 AB，AC 上分别取点 D，E，使 $\overrightarrow{AD}=\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}$，$\overrightarrow{AE}=\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}$，以 AD，AE 为邻边作平行四边形 $ADFE$，则 $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}$，显然 $|\overrightarrow{AD}|=|\overrightarrow{AE}|=1$，因此平行四边形 $ADFE$ 为菱形，AF 平分 $\angle BAC$，又 $\left(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}+\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}\right)\cdot\overrightarrow{BC}=0$，故 $\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{BC}=0$，即 $AF\perp BC$，故△ABC 是等腰三角形，且 $AB=AC$. 设直线 AF 交 BC 于点 O，则 O 是 BC 的中点，所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}a\cdot AO$，又 $S_{\triangle ABC}=\frac{a^2+b^2-c^2}{4}=\frac{1}{4}a^2$，所以 $AO=\frac{1}{2}a=\frac{1}{2}BC$，所以 $\angle BAC=90°$，所以△ABC 是等腰直角三角形. 故选 D.



16. **解**：如图，连接 BD，设 $AB=c$，$BD=a$，$AD=b$，$BC=n$，$CD=m$，
由 $\cos A=\frac{3}{5}$ 且 $0<A<\pi$，得 $\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\frac{4}{5}$.



在△ABD 中，由正弦定理得 $\frac{a}{\sin A}=5\sqrt{5}$，解得 $a=4\sqrt{5}$.

在$\triangle ABD$中，由余弦定理得$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，

所以$80=b^2+c^2-\frac{6}{5}bc=(b+c)^2-\frac{16}{5}bc\geqslant(b+c)^2-\frac{16}{5}\times\frac{(b+c)^2}{4}=\frac{(b+c)^2}{5}$，即$(b+c)^2\leqslant400$，

可得$0<b+c\leqslant20$，当且仅当$b=c=10$时等号成立.

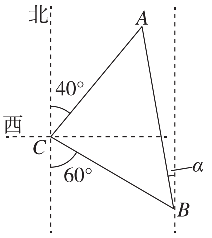
在$\triangle BCD$中，$\angle BCD=\pi-A$，

由余弦定理可得$80=a^2=m^2+n^2-2mn\cos(\pi-A)=m^2+n^2+\frac{6}{5}mn=(m+n)^2-\frac{4}{5}mn\geqslant(m+n)^2-\frac{4}{5}\times\frac{(m+n)^2}{4}=\frac{4(m+n)^2}{5}$，即$(m+n)^2\leqslant100$，可得$0<m+n\leqslant10$，当且仅当$m=n=5$时等号成立，

所以四边形$ABCD$周长的最大值为30.

3. 余弦定理、正弦定理应用举例

1. B 【解析】如图，由题意知$AC=BC$，$\angle ACB=80°$，所以$\angle CBA=50°$，又$\alpha+\angle CBA=60°$，所以$\alpha=10°$，即A在B的北偏西$10°$方向上. 故选B.

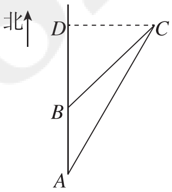


2. C 【解析】由题意，在$\triangle ABC$中，$AC=3$ km，$BC=5$ km，$\angle ACB=120°$，由余弦定理可得，$AB^2=3^2+5^2-2\times3\times5\times\cos120°=49$，$\therefore AB=7$ km. 故选C.

3. C 【解析】由题意知$B=180°-A-C=37°$. 在$\triangle ABC$中，由正弦定理得$\frac{AC}{\sin B}=\frac{AB}{\sin C}$，即$\frac{60\sqrt{3}}{\sin37°}=\frac{AB}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$，所以$AB=\frac{90}{\sin37°}\approx150$(米). 故选C.

4. D 【解析】在Rt$\triangle ABC$中，设$AB=x$米，则由$\angle ACB=45°$，可知$AC=x$米. 在Rt$\triangle ABD$中，因为$AD=[x+20(\sqrt{3}-1)]$米，$\angle ADB=30°$，所以$\frac{x}{x+20(\sqrt{3}-1)}=\tan30°$，即$\frac{x+20(\sqrt{3}-1)}{x}=\sqrt{3}$，解得$x=20$，即塔高为20米. 故选D.

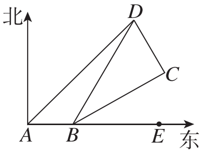
5. C 【解析】如图所示，设小岛在C处，过C作$CD\perp AD$，垂足为D，由题意知$A=30°$，$\angle DBC=45°$，$AB=\frac{20}{60}\times30(\sqrt{3}-1)=10(\sqrt{3}-1)$(海里). 在$\triangle ABC$中，$\angle ABC=135°$，则$\angle ACB=15°$，由正弦定理得$\frac{AB}{\sin\angle ACB}=\frac{BC}{\sin A}$，所以$BC=\frac{AB\cdot\sin A}{\sin\angle ACB}=\frac{10(\sqrt{3}-1)\cdot\sin30°}{\sin15°}=\frac{10(\sqrt{3}-1)\times\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}=10\sqrt{2}$(海里)，所以$CD=BC\sin45°=10\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=10$(海里)，故选C.



6. B 【解析】过点C作直线AB的垂线，垂足为D. 由题意得$AB=300\times\frac{1}{30}=10$(km)，$\angle ACB=30°$. 因为$\frac{AB}{\sin\angle ACB}=\frac{BC}{\sin\angle BAC}$，所以$BC=AB\cdot\frac{\sin\angle BAC}{\sin\angle ACB}=10\sqrt{2}$(km)，又$\sin75°=\sin(45°+30°)=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$，所以$CD=BC\cdot\sin\angle CBD=10\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}=5(\sqrt{3}+1)\approx13.66$(km)，故山顶$C$的海拔约为$19-13.66\approx5.3$(km). 故选B.

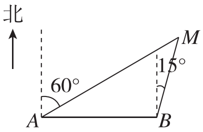
7. C 【解析】由题可得$CD=10$海里，$\angle ADC=120°$，$\angle BDC=60°$，$\angle BCD=90°$，$\angle ACD=30°$，所以$\angle CAD=30°$，$\angle ADB=60°$. 在$\triangle ACD$中，可得$AD=CD=10$海里. 在Rt$\triangle BCD$中，因为$\angle BDC=60°$，$\angle BCD=90°$，所以$BD=2CD=20$海里. 在$\triangle ABD$中，由余弦定理可得$AB^2=AD^2+BD^2-2AD\cdot BD\cos60°=100+400-2\times10\times20\times\frac{1}{2}=300$，所以$AB=10\sqrt{3}$海里，即$A$，$B$两处岛屿间的距离为$10\sqrt{3}$海里. 故选C.

8. BC 【解析】如图所示，$\angle DAB=45°$，$\angle DBE=60°$，$\angle DBC=\angle CBE=30°$，$\angle ADB=15°$，$\sin15°=\sin(45°-30°)=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$. 在$\triangle ABD$中，由正弦定理得$\frac{AB}{\sin\angle ADB}=\frac{BD}{\sin\angle DAB}$，解得$BD=2a$. 在$\triangle BDC$中，由余弦定理得$DC^2=BD^2+BC^2-2BD\cdot BC\cos\angle DBC=a^2$，所以$DC^2+BC^2=BD^2$，则$\angle BCD=90°$，所以$D$在$C$的北偏西$30°$方向，且$D$，$C$相距$a$ km. 故选BC.



9. AC 【解析】$\because\angle CBD=45°$，$\angle BAC=15°$，$\therefore\angle ACB=30°$. 在$\triangle ABC$中，由正弦定理得$BC=\frac{AB\sin\angle BAC}{\sin\angle ACB}=\frac{100\sin15°}{\sin30°}=50(\sqrt{6}-\sqrt{2})$(m). 在$\triangle BCD$中，由正弦定理得$\frac{BC}{\sin\angle BDC}=\frac{CD}{\sin\angle CBD}$，即$\frac{50(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{\sin\angle BDC}=\frac{50}{\sin45°}$，$\therefore\sin\angle BDC=\sqrt{3}-1$，即$\sin(\theta+90°)=\sqrt{3}-1$，$\therefore\cos\theta=\sqrt{3}-1$，故A正确，B错误. 在$\triangle ABC$中，$\angle ABC=135°$，由正弦定理得，$\frac{AB}{\sin\angle ACB}=\frac{AC}{\sin\angle ABC}$，故$AC=\frac{100\times\sin135°}{\sin30°}=\frac{100\times\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{2}}=100\sqrt{2}$(m)，故C正确，D错误. 故选AC.

10. $30\sqrt{2}$ 【解析】如图，依题意有$AB=15\times4=60$(km)，$\angle MAB=30°$，$\angle AMB=45°$. 在$\triangle AMB$中，由正弦定理得$\frac{AB}{\sin45°}=\frac{BM}{\sin30°}$，所以$BM=30\sqrt{2}$ km.



11. $\sqrt{10}$ 【解析】设$BD=t$，由余弦定理可得$BC^2=6^2+(3\sqrt{2})^2-2\times6\times3\sqrt{2}\cos135°=90$，所以$BC=3\sqrt{10}$，则$\cos\angle ABC=\frac{6^2+t^2-t^2}{2\times6\times t}=\frac{6^2+(3\sqrt{10})^2-(3\sqrt{2})^2}{2\times6\times3\sqrt{10}}$，解得$t=\sqrt{10}$.

12. $25\sqrt{3}$ $\frac{25(\sqrt{2}+\sqrt{10})}{2}$ 【解析】由题可知$\triangle ADC$是等腰三角形，且$AC=CD$，得$AC=50$. 在Rt$\triangle ABC$中，$AB=AC\cdot\sin\angle ACB=50\sin60°=25\sqrt{3}$，故雕像的高度为$25\sqrt{3}$米. 在Rt$\triangle ABC$中，$AC=50$，$\angle ACB=60°$，所以$CB=25$. 在Rt$\triangle ABF$中，$\angle AFB=45°$，$AB=25\sqrt{3}$，所以$FB=25\sqrt{3}$，又在$\triangle BCF$中，$\angle BCF=45°$，所以由余弦定理可得$BF^2=CF^2+CB^2-2CF\cdot CB\cdot\cos45°$，可得$CF=\frac{25(\sqrt{2}+\sqrt{10})}{2}$，故观景点$C$与$F$之间的距离为$\frac{25(\sqrt{2}+\sqrt{10})}{2}$米.

13. **解**：(1)由题意知，在$\triangle ABC$中，$\angle ABC=180°-70°+10°=120°$，$AB=(\sqrt{3}-1)$ n mile，$BC=2$ n mile. 由余弦定理，得$AC^2=AB^2+BC^2-2AB\times BC\times\cos\angle ABC=(\sqrt{3}-1)^2+4+2(\sqrt{3}-1)=6$，所以$AC=\sqrt{6}$ n mile.

(2)根据正弦定理可得$\frac{AC}{\sin\angle ABC}=\frac{BC}{\sin\angle CAB}$，

故$\sin\angle CAB=\dfrac{BC}{AC}\sin\angle ABC=\dfrac{2\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,
又$\angle CAB\in(0^\circ,60^\circ)$,所以$\angle CAB=45^\circ$,
又$70^\circ-45^\circ=25^\circ$,所以从$A$出发沿北偏东$25^\circ$的方向航行$\sqrt{6}$ n mile即可到达C处.

14. 解:若要求角楼的高,即AB的长,则必须知道一边的长,若知道C,D两点间的距离,即CD的长,则解$\triangle ACD$和$\triangle ABC$即可,此时可选①③④;若知道C,E两点间的距离,即CE的长,则解$\triangle ACE$和$\triangle ABC$即可,此时可选②③⑤.其他选择方案均不可求得AB的长.

若选①③④,由已知可得,$\angle ABC=\angle BCD=\dfrac{\pi}{2}$,

在$\triangle ACD$中,$\angle ACD=\dfrac{\pi}{2}-\alpha$,$\angle ADC=\dfrac{\pi}{2}+\beta$,$\angle CAD=\alpha-\beta$,所以$\dfrac{AC}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)}=\dfrac{CD}{\sin(\alpha-\beta)}$,

所以$AC=\dfrac{\cos\beta}{\sin(\alpha-\beta)}\cdot CD$,所以$AB=AC\cdot\sin\alpha=\dfrac{\cos\beta\sin\alpha}{\sin(\alpha-\beta)}\cdot CD$,其中各个量均已知.

若选②③⑤,已知$\angle ACE$和$\angle AEC$,则$\angle CAE=\pi-\angle ACE-\angle AEC$.在$\triangle ACE$中,由正弦定理得$\dfrac{AC}{\sin\angle AEC}=\dfrac{CE}{\sin\angle CAE}=\dfrac{CE}{\sin(\angle ACE+\angle AEC)}$,

所以$AC=\dfrac{\sin\angle AEC}{\sin(\angle ACE+\angle AEC)}\cdot CE$,

所以$AB=AC\sin\alpha=\dfrac{\sin\angle AEC\cdot\sin\alpha}{\sin(\angle ACE+\angle AEC)}\cdot CE$,其中各个量均已知.

15. $80\sqrt{5}$ **【解析】** 在$\triangle ACD$中,$\because\angle ACD=15^\circ$,$\angle ADC=150^\circ$,$\therefore\angle DAC=15^\circ$,由正弦定理得$AC=\dfrac{80\sin150^\circ}{\sin15^\circ}=\dfrac{40}{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}=40(\sqrt{6}+\sqrt{2})$(米).在$\triangle BCD$中,$\because\angle BDC=15^\circ$,$\angle BCD=135^\circ$,$\therefore\angle DBC=30^\circ$,由正弦定理得$BC=\dfrac{80\sin15^\circ}{\sin30^\circ}=40(\sqrt{6}-\sqrt{2})$(米).在$\triangle ABC$中,由余弦定理得$AB^2=AC^2+BC^2-2AC\cdot BC\cdot\cos\angle ACB=1600\times(8+4\sqrt{3})+1600\times(8-4\sqrt{3})+1600\times(\sqrt{6}+\sqrt{2})\times(\sqrt{6}-\sqrt{2})=1600\times16+1600\times4=32\ 000$,$\therefore AB=80\sqrt{5}$米,故$A,B$两点间的距离为$80\sqrt{5}$米.

16. 解:(1)由题意得$\sin A=\dfrac{5}{13}$,$\sin C=\dfrac{4}{5}$.在$\triangle ABC$中,

$\sin B=\sin(A+C)=\sin A\cos C+\cos A\sin C=\dfrac{63}{65}$.

由$\dfrac{AB}{\sin C}=\dfrac{AC}{\sin B}$,得$AB=\dfrac{AC\sin C}{\sin B}=1040$(m),所以索道$AB$的长为1040 m.

(2)假设乙出发t min后,甲、乙(乙在缆车上)两游客之间的距离为d m,此时甲行走了$(100+50t)$m,乙距离A处$130t$ m,由余弦定理得$d^2=(100+50t)^2+(130t)^2-2\times130t\times(100+50t)\times\dfrac{12}{13}=200(37t^2-70t+50)$.因为$0\leqslant t\leqslant\dfrac{1040}{130}$,即$0\leqslant t\leqslant8$,所以当$t=\dfrac{35}{37}$时,甲、乙(乙在缆车上)两游客之间的距离最短.

(3)由$\dfrac{BC}{\sin A}=\dfrac{AC}{\sin B}$,得$BC=\sin A\cdot\dfrac{AC}{\sin B}=500$(m).

$\dfrac{1040}{130}=8$,乙从B出发时,甲已经走了$50\times(2+8+1)=550$(m),还需要走$1260-550=710$(m)才能到达C.设乙步行的速度为v m/min,由题意得$-3\leqslant\dfrac{500}{v}-\dfrac{710}{50}\leqslant3$,解得$\dfrac{1250}{43}\leqslant v\leqslant\dfrac{625}{14}$,所以为了使两位游客在$C$处互相等待的时间不超过3 min,乙步行的速度(单位:m/min)应控制在$\left[\dfrac{1250}{43},\dfrac{625}{14}\right]$内.

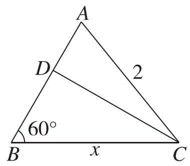
滚动习题(三)

1. B **【解析】** 由余弦定理得$BC^2=AC^2+AB^2-2AC\cdot AB\cos A$,即$BC^2=1^2+3^2-2\times1\times3\times\dfrac{5}{6}=5$,所以$BC=\sqrt{5}$.故选B.

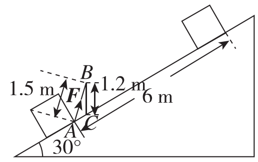
2. D **【解析】** 由题可得$\sin C=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$,由正弦定理得$\dfrac{c}{\sin C}=\dfrac{a}{\sin A}$,则$c=\dfrac{a\sin C}{\sin A}=\dfrac{\sqrt{2}\times\frac{2\sqrt{2}}{3}}{\frac{1}{2}}=\dfrac{8}{3}$,故$c=\dfrac{8}{3}$.故选D.

3. D **【解析】** 因为$\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD}=\mathbf{0}$,所以$\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DC}=\mathbf{0}$,即$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$,可知$AB,CD$两边平行且相等,所以四边形$ABCD$是平行四边形,由已知条件不能判断四边形$ABCD$是否为矩形、菱形或正方形,故A,B,C错误,D正确.故选D.

4. B **【解析】** 由题设,过C作$CD\perp AB$于D,如图所示,由图可知,当$\begin{cases}CD=x\sin60^\circ<2,\\x>2,\end{cases}$即$2<x<\dfrac{4}{3}\sqrt{3}$时,三角形有两解.当$x\sin60^\circ>2$,即$x>\dfrac{4}{3}\sqrt{3}$时,三角形不存在;当$x=2$或$\dfrac{4}{3}\sqrt{3}$时,$\triangle ABC$为等边三角形或直角三角形,三角形仅有一个解;当$x<2$时,在射线$BD$方向上有一个$\triangle ABC$,而在射线$DB$方向上不存在,故此时三角形仅有一个解.故选B.



5. B **【解析】** 如图,在$\triangle ABC$中,$\angle ACB=120^\circ$,由正弦定理得$\dfrac{AB}{\sin120^\circ}=\dfrac{BC}{\sin\angle BAC}$,则$\sin\angle BAC=\dfrac{2\sqrt{3}}{5}$,可得$\cos\angle BAC=\dfrac{\sqrt{13}}{5}$,$\therefore$此人对该物体所做的功$W=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{s}=25\times6\times\cos\angle BAC=30\sqrt{13}$(J).故选B.



6. C **【解析】** $\dfrac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}$表示与$\overrightarrow{AB}$共线的单位向量,$\dfrac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}$表示与$\overrightarrow{AC}$共线的单位向量,所以$\dfrac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}+\dfrac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}$的方向与$\angle BAC$的平分线一致,因为$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\lambda\left(\dfrac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}+\dfrac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}\right)$,所以$\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{AP}=\lambda\left(\dfrac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}+\dfrac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}\right)$,所以点$P$在$\angle BAC$的平分线上,即$AD$平分$\angle BAC$.在$\triangle ABD$中,易知$\angle BAD=\dfrac{\pi}{3}$,$AD=1$,利用正弦定理知$BD=\dfrac{AD}{\sin B}\times\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sin B}$,同理,在$\triangle ACD$中,$CD=\dfrac{AD}{\sin C}\times\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sin C}$,所以$BC=BD+$

$CD=\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sin B}+\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sin C}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(\dfrac{1}{\sin B}+\dfrac{1}{\sin C}\right)$，其中 $B+C=\dfrac{\pi}{3}$，分析可知当 $B=C=\dfrac{\pi}{6}$ 时，BC 取得最小值，即 $BC_{\min}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times 2\times\dfrac{1}{\sin\frac{\pi}{6}}=2\sqrt{3}$. 故选 C.

7. ACD 【解析】对于 A，因为 $\sin A>\sin B$，所以利用正弦定理得 $\dfrac{a}{2R}>\dfrac{b}{2R}$（$R$ 为 $\triangle ABC$ 外接圆的半径），所以 $a>b$，故 A 正确；对于 B，若 $\sin 2A=\sin 2B$，则 $\sin 2A=\sin(\pi-2B)$，则 $2A=2B$ 或 $2A+2B=\pi$，所以 $A=B$ 或 $A+B=\dfrac{\pi}{2}$，所以 $\triangle ABC$ 为等腰三角形或直角三角形，故 B 错误；对于 C，在 $\triangle ABC$ 中，由于 $B=30^\circ$，$b=\sqrt{2}$，$c=2$，则 $c>b=\sqrt{2}>c\sin B=1$，故满足条件的 $\triangle ABC$ 有两个，故 C 正确；对于 D，若 $\triangle ABC$ 的面积 $S=\dfrac{\sqrt{3}}{4}(b^2+c^2-a^2)$，则 $\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\cdot 2bc\cos A$，所以 $\tan A=\sqrt{3}$，由于 $A\in(0,\pi)$，所以 $A=\dfrac{\pi}{3}$，故 D 正确. 故选 ACD.

8. ABD 【解析】对于 A，设 $\triangle ABC$ 外接圆的半径为 R，由正弦定理得 $2R=\dfrac{c}{\sin C}=\dfrac{8\sqrt{3}}{3}$，$\therefore\triangle ABC$ 外接圆的半径 $R=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$，故 A 正确；对于 B，由余弦定理得 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$，即 $16=a^2+b^2-ab\geqslant 2ab-ab=ab$，当且仅当 $a=b$ 时等号成立，即 $ab\leqslant 16$，$\therefore\triangle ABC$ 面积的最大值为 $\dfrac{1}{2}\times 16\sin\dfrac{\pi}{3}=4\sqrt{3}$，故 B 正确；对于 C，在 $\triangle ABC$ 中，由余弦定理得 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$，即 $16=a^2+b^2-ab=(a+b)^2-3ab\geqslant(a+b)^2-3\times\dfrac{(a+b)^2}{4}=\dfrac{(a+b)^2}{4}$，可得 $4<a+b\leqslant 8$，当且仅当 $a=b=4$ 时，等号成立，$\therefore 8<a+b+c\leqslant 12$，即 $\triangle ABC$ 的周长的最大值为 12，故 C 错误；对于 D，由余弦定理得 $16=a^2+b^2-ab\geqslant a^2+b^2-\dfrac{a^2+b^2}{2}=\dfrac{a^2+b^2}{2}$，当且仅当 $a=b$ 时，等号成立，则 a^2+b^2 的最大值为 32，故 D 正确. 故选 ABD.

9. 1 【解析】$\dfrac{\sin 2A}{\sin C}=\dfrac{2\sin A\cos A}{\sin C}=\dfrac{2a\cos A}{c}=\dfrac{4}{3}\cos A=\dfrac{4}{3}\times\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=1$.

10. 7 【解析】由已知得 $\triangle ABC$ 的面积为 $\dfrac{1}{2}AB\cdot AC\cdot\sin A=20\sin A=10\sqrt{3}$，所以 $\sin A=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，因为 $A\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，所以 $A=\dfrac{\pi}{3}$. 由余弦定理得 $BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cdot\cos A=49$，所以 $BC=7$.

11. 垂 【解析】因为 $\overrightarrow{HA}\cdot\overrightarrow{HB}=\overrightarrow{HB}\cdot\overrightarrow{HC}$，所以 $\overrightarrow{HB}\cdot(\overrightarrow{HA}-\overrightarrow{HC})=\overrightarrow{HB}\cdot\overrightarrow{CA}=0$，所以 $\overrightarrow{HB}\perp\overrightarrow{CA}$，即点 H 在边 CA 上的高所在的直线上，同理可得 $\overrightarrow{HA}\perp\overrightarrow{CB}$，$\overrightarrow{HC}\perp\overrightarrow{AB}$，所以点 H 为 $\triangle ABC$ 的三条高所在直线的交点，即点 H 是 $\triangle ABC$ 的垂心.

12. $(\sqrt{3},2\sqrt{7}]$ 【解析】由题意得 $\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\dfrac{1}{2}$，又因为 $B\in(0,\pi)$，所以 $B=\dfrac{\pi}{3}$. 由正弦定理可得，$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{c}{\sin C}=\dfrac{b}{\sin B}=2$，则 $2a+c=4\sin A+2\sin C=4\sin A+2\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}-A\right)=5\sin A+\sqrt{3}\cos A=2\sqrt{7}\sin(A+\varphi)$ $\left(其中 \sin\varphi=\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}},\cos\varphi=\dfrac{5}{2\sqrt{7}}\right)$，$A\in\left(0,\dfrac{2\pi}{3}\right)$，易知 $2a+c\in(\sqrt{3},2\sqrt{7}]$.

13. 解：(1) 由 $c\cos B+b\cos C=\dfrac{a}{2\cos A}$ 及正弦定理得 $\sin C\cos B+\sin B\cos C=\dfrac{\sin A}{2\cos A}$，

所以 $\sin(B+C)=\dfrac{\sin A}{2\cos A}$，即 $\sin A=\dfrac{\sin A}{2\cos A}$，因为 $\sin A\neq 0$，所以 $\cos A=\dfrac{1}{2}$，

又 $0<A<\pi$，所以 $A=\dfrac{\pi}{3}$.

(2) 因为 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}bc\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=4\sqrt{3}$，所以 $bc=16$，由余弦定理得 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=(b+c)^2-2bc-2bc\cos A$，即 $27=(b+c)^2-3\times 16$，可得 $b+c=5\sqrt{3}$，所以 $\triangle ABC$ 的周长为 $a+b+c=3\sqrt{3}+5\sqrt{3}=8\sqrt{3}$.

设 $\triangle ABC$ 外接圆的半径为 R，由 $2R=\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{3\sqrt{3}}{\sin\frac{\pi}{3}}=6$，得 $R=3$，所以外接圆的面积为 $\pi R^2=3^2\pi=9\pi$.

(3) 因为 $\sin B=\dfrac{\sqrt{6}}{3}<\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\sin A$，所以 $b<a$，

所以 $B<A$，$\cos B=\sqrt{1-\sin^2 B}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，

所以 $\sin 2B=2\sin B\cos B=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，$\cos 2B=2\cos^2 B-1=-\dfrac{1}{3}$，故 $\sin(2B+A)=\sin\left(2B+\dfrac{\pi}{3}\right)=\sin 2B\cos\dfrac{\pi}{3}+\cos 2B\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{2\sqrt{2}-\sqrt{3}}{6}$.

14. 解：(1) 证明：设 $\overrightarrow{BN}=k\overrightarrow{BQ}$，$\because$ 点 Q 为 AC 的中点，$\therefore\overrightarrow{BQ}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BA}$，$\therefore\overrightarrow{BN}=k\left(\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BA}\right)=\dfrac{k}{2}\overrightarrow{BC}+\dfrac{k}{2}\overrightarrow{BA}=\dfrac{3k}{2}\overrightarrow{BM}+\dfrac{k}{2}\overrightarrow{BA}$. $\because N,M,A$ 三点共线，$\therefore\dfrac{3k}{2}+\dfrac{k}{2}=1$，$\therefore k=\dfrac{1}{2}$，$\therefore$ 点 N 为 BQ 的中点.

(2) 由 (1) 知，$\overrightarrow{AN}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AQ}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AC}$. 设 $\overrightarrow{AM}=m\overrightarrow{AN}=\dfrac{m}{2}\overrightarrow{AB}+\dfrac{m}{4}\overrightarrow{AC}$，$\because M,B,C$ 三点共线，$\therefore\dfrac{m}{2}+\dfrac{m}{4}=1$，$\therefore m=\dfrac{4}{3}$，$\therefore\overrightarrow{NA}=-3\overrightarrow{NM}$，$\therefore\overrightarrow{NA}\cdot\overrightarrow{NM}=-3\overrightarrow{NM}\cdot\overrightarrow{NM}=-6$，$\therefore\overrightarrow{NM}^2=2$，$\therefore|\overrightarrow{NM}|=\sqrt{2}$，$\therefore|\overrightarrow{AM}|=4\sqrt{2}$. $\because\overrightarrow{AM}^2=32=\left(\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}\right)^2=\dfrac{4}{9}\overrightarrow{AB}^2+\dfrac{4}{9}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\dfrac{1}{9}\overrightarrow{AC}^2=\dfrac{7}{9}\overrightarrow{AB}^2$，$\therefore|\overrightarrow{AB}|^2=\dfrac{288}{7}$，$\therefore S_{\triangle ABC}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\cdot|\overrightarrow{AB}|^2=\dfrac{72\sqrt{3}}{7}$.

15. 解：(1) 在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，因为 $\tan\angle BAC=\dfrac{BC}{AC}=\sqrt{3}$，所以 $\angle BAC=60^\circ$. 在 $\triangle ACM$ 中，由余弦定理得 $CM^2=AC^2+AM^2-2AC\cdot AM\cdot\cos\angle CAM=40^2+20^2-2\times 40\times 20\times\dfrac{1}{2}=1200$，所以 $CM=20\sqrt{3}$ m，又 $AC=40$ m，$AM=20$ m，可得 $CM^2+AM^2=AC^2$，则 $CM\perp AB$，可得 $MN=CM\cdot\tan\angle MCN=20\sqrt{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{3}=20(\mathrm{m})$，$CN=\dfrac{CM}{\cos\angle MCN}=\dfrac{20\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=40(\mathrm{m})$，所以护栏的长度，即 $\triangle MNC$ 的周长为 $20+40+20\sqrt{3}=60+20\sqrt{3}(\mathrm{m})$.

(2) 由题意可得，$MN=\sqrt{3}AM$，设 $\angle ACM=\theta$，则 $\angle CNM=90^\circ-\theta$.

在$\triangle ACM$中，由正弦定理得$\dfrac{AM}{\sin\angle ACM}=\dfrac{MC}{\sin\angle CAM}$，整理得$AM=\dfrac{MC\cdot\sin\angle ACM}{\sin\angle CAM}=\dfrac{2\sqrt{3}MC\cdot\sin\theta}{3}$.

在$\triangle CMN$中，由正弦定理得$\dfrac{MN}{\sin\angle MCN}=\dfrac{MC}{\sin\angle CNM}$，整理得$MN=\dfrac{MC\cdot\sin\angle MCN}{\sin\angle CNM}=\dfrac{MC}{2\sin(90^\circ-\theta)}$，

则$\dfrac{MC}{2\sin(90^\circ-\theta)}=\sqrt{3}\times\dfrac{2\sqrt{3}MC\cdot\sin\theta}{3}$，整理得$\sin 2\theta=\dfrac{1}{2}$，而$0^\circ<\theta<60^\circ$，故$2\theta=30^\circ$，即$\angle ACM=\theta=15^\circ$.

第七章　复数

7.1　复数的概念

7.1.1　数系的扩充和复数的概念

1. B **[解析]** 复数$z=1-i$的虚部为-1. 故选B.
2. B **[解析]** 以$2i-\sqrt{5}$的虚部为实部，以$\sqrt{5}i-2$的实部为虚部的新复数是$2-2i$.
3. C **[解析]** $\because x^2+10=0$，$\therefore x^2=-10=10i^2$，$\therefore x=\pm\sqrt{10}i$，故选C.
4. D **[解析]** $\because A,B,C$分别表示复数集、实数集和纯虚数集，$\therefore A\supseteq B$，$A\supseteq C$，$B\cap C=\varnothing$，故选D.
5. C **[解析]** 由题意得$a-2=0$，$b-1=0$，$\therefore a=2$，$b=1$，$\therefore a+bi=2+i$. 故选C.
6. A **[解析]** 若复数$z=a^2-b^2+(a+|a|)i(a,b\in\mathbf{R})$为实数，则有$a+|a|=0$，可得$a\leqslant 0$，故选A.
7. A **[解析]** $\because z_1=z_2$，$\therefore\begin{cases}m=2\cos\theta,\\4-m^2=\lambda+3\sin\theta,\end{cases}$消去$m$得$4\sin^2\theta=\lambda+3\sin\theta$，$\therefore\lambda=4\left(\sin\theta-\dfrac{3}{8}\right)^2-\dfrac{9}{16}$. $\because -1\leqslant\sin\theta\leqslant 1$，$\therefore$当$\sin\theta=\dfrac{3}{8}$时，$\lambda$取得最小值$-\dfrac{9}{16}$，当$\sin\theta=-1$时，$\lambda$取得最大值7，$\therefore -\dfrac{9}{16}\leqslant\lambda\leqslant 7$，即$\lambda$的取值范围是$\left[-\dfrac{9}{16},7\right]$，故选A.
8. BCD **[解析]** 对于A，若$a=i$，则$ai=i^2=-1$，不是纯虚数，故A错误；对于B，虚部为$-\sqrt{2}$的虚数可以表示为$m-\sqrt{2}i(m\in\mathbf{R})$，有无数个，故B正确；根据复数的分类，可知C正确；两个复数相等一定能推出它们的实部相等，必要性成立，但两个复数的实部相等推不出两个复数相等，充分性不成立，故D正确. 故选BCD.
9. AD **[解析]** 对于A，因为$i^2=-1$，所以$1+i^2=0$，故A正确；对于B，两个虚数不能比较大小，故B错误；对于C，当$x=1$，$y=i$时，$x^2+y^2=0$，故C错误；对于D，若$z=(a-1)+(a^2+2a-3)i>-2$，则$\begin{cases}a^2+2a-3=0,\\a-1>-2,\end{cases}$解得$a=1$，所以D正确. 故选AD.
10. 5 **[解析]** 因为$x+3i=(y-2)i$，所以$\begin{cases}x=0,\\y-2=3,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=0,\\y=5,\end{cases}$所以$x+y=5$.
11. $(-\infty,-1)\cup(3,+\infty)$ **[解析]** 由已知可得$a^2>2a+3$，即$a^2-2a-3>0$，解得$a>3$或$a<-1$，即实数a的取值范围是$(-\infty,-1)\cup(3,+\infty)$.
12. $2+i$ **[解析]** 由题意得$(x+y)+(x+3)i=(3x+2y)+yi$，所以$x+y=3x+2y$，$x+3=y$，解得$x=-1$，$y=2$，所以$z=y-xi=2+i$.
13. **解：**(1)复数z为实数的充要条件是z的虚部为0，即$m^2-3m-10=0$，解得$m=-2$或$m=5$，
所以当$m=-2$或$m=5$时，z为实数.
(2)复数z为纯虚数的充要条件是z的虚部不为0，实部为0，即$\begin{cases}m^2-3m-10\neq 0,\\m^2-m-6=0,\end{cases}$解得$m=3$，
所以当$m=3$时，z为纯虚数.
(3)复数z为0的充要条件是z的实部与虚部同时为0，即$\begin{cases}m^2-3m-10=0,\\m^2-m-6=0,\end{cases}$解得$m=-2$，所以当$m=-2$时，$z$为0.
14. **解：**由题意得$(a+3)+(b^2-1)i=3i$①，或$8=(a^2-1)+(b+2)i$②，或$(a+3)+(b^2-1)i=(a^2-1)+(b+2)i$③.
由①得$\begin{cases}a+3=0,\\b^2-1=3,\end{cases}$解得$\begin{cases}a=-3,\\b=\pm 2,\end{cases}$
由②得$\begin{cases}a^2-1=8,\\b+2=0,\end{cases}$解得$\begin{cases}a=\pm 3,\\b=-2,\end{cases}$
由③得$\begin{cases}a^2-1=a+3,\\b+2=b^2-1,\end{cases}$即$\begin{cases}a^2-a-4=0,\\b^2-b-3=0,\end{cases}$
a,b无整数解，不符合题意.
综上，$a=-3,b=2$或$a=-3,b=-2$或$a=3,b=-2$.
15. $-\dfrac{3}{5}$ **[解析]** $\because$复数$z_1=2+mi(m\in\mathbf{R})$，$z_2=\tan\theta+i\cos 2\theta(\theta\in\mathbf{R})$，且$z_1=z_2$，$\therefore\begin{cases}\tan\theta=2,\\\cos 2\theta=m,\end{cases}$$\therefore m=\cos 2\theta=\dfrac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{\cos^2\theta+\sin^2\theta}=\dfrac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}=\dfrac{1-4}{1+4}=-\dfrac{3}{5}$.
16. **解：**因为$\log_{\frac{1}{2}}(m+n)-(m^2-3m)i>-1$，所以$\log_{\frac{1}{2}}(m+n)-(m^2-3m)i$是实数，从而有$\begin{cases}m^2-3m=0①,\\\log_{\frac{1}{2}}(m+n)>-1②,\end{cases}$由①得$m=0$或$m=3$. 当$m=0$时，代入②得$n<2$，又$m+n>0$，$m,n$为自然数，所以$n=1$；当$m=3$时，代入②得$n<-1$，与$n$是自然数矛盾. 综上可得，$m=0$，$n=1$.

7.1.2　复数的几何意义

1. B **[解析]** $z=-3+2i$在复平面内对应的点的坐标为$(-3,2)$，该点位于第二象限. 故选B.
2. A **[解析]** 因为复数$z=4+3i$，所以$\overline{z}=4-3i$.
3. C **[解析]** $z=i+i^2=-1+i$，所以$|z|=\sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt{2}$. 故选C.
4. C **[解析]** 由题意得$A\left(\dfrac{1}{2},-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$B\left(-\dfrac{1}{2},-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$，所以向量$\overrightarrow{OB}$对应的复数为$-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$，所以向量$\overrightarrow{OB}$对应的复数的共轭复数为$-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$，故选C.
5. B **[解析]** 因为$z=(m^2+3m-4)+(m+2)i$在复平面内对应的点在第三象限，所以$\begin{cases}m^2+3m-4<0,\\m+2<0,\end{cases}$即$\begin{cases}-4<m<1,\\m<-2,\end{cases}$解得$-4<m<-2$，则实数$m$的取值范围是$(-4,-2)$，故选B.
6. A **[解析]** 由题意可知$(|z|-3)(|z|+1)=0$，即$|z|=3$或$|z|=-1$，$\because|z|\geqslant 0$，$\therefore|z|=3$，$\therefore$复数z在复平面内对应的点的集合表示的图形是1个圆.
7. B **[解析]** 因为$|z|<\sqrt{2}$，所以$|z|^2<2$，由$|z|^2=(\sqrt{3}\sin\theta)^2+\cos^2\theta=2\sin^2\theta+1<2$，得$\sin^2\theta<\dfrac{1}{2}$，即$-\dfrac{\sqrt{2}}{2}<\sin\theta<\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，解得$-\dfrac{\pi}{4}+k\pi<\theta<\dfrac{\pi}{4}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$.
8. AC **[解析]** $|z|=\sqrt{(-1)^2+(-2)^2}=\sqrt{5}$，A正确；复数$z$在复平面内对应的点的坐标为$(-1,-2)$，该点位于第三象限，B不正确；$z$的共轭复数为$-1+2i$，C正确；复数$z$在复平面内对应的点$(-1,-2)$不在直线$y=-2x$上，D不正确. 故选AC.
9. CD **[解析]** 因为复数$z_1=1-ai(a\in\mathbf{R})$对应的点Z_1满足$|\overrightarrow{OZ_1}|=\sqrt{2}$，所以$|\overrightarrow{OZ_1}|=\sqrt{1+a^2}=\sqrt{2}$，所以$a=\pm 1$，所以$Z_1(1,1)$或$Z_1(1,-1)$，又点$Z$与$Z_1$关于实轴对称，所以$Z(1,-1)$或$Z(1,1)$，所以复数$z=1-i$或$1+i$. 故选CD.
10. $2\sqrt{2}$ **[解析]** 因为复数$z=2-bi(b\in\mathbf{R})$的实部为2，虚部

为$-b$，所以由题意可得$-b+2=0$，解得$b=2$，所以$|z|=\sqrt{2^2+(-2)^2}=2\sqrt{2}$.

11. 4π 【解析】由题可知z在复平面内对应的点所构成的图形为半径为2和$2\sqrt{2}$的两个同心圆所夹的圆环，则其面积为$\pi\times[(2\sqrt{2})^2-2^2]=4\pi$.

12. -2 【解析】设$z=a+bi(a>0,a,b\in\mathbf{R})$，∵复数$z$在复平面内对应的点在射线$y=2x(x\geqslant0)$上，∴$b=2a$，又$|z|=\sqrt{5}$，∴$\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{5a^2}=\sqrt{5}$，∴$a=1$，∴$b=2$，∴$z=1+2i$，$\overline{z}=1-2i$，∴复数$\overline{z}$的虚部为$-2$.

13. **解**：(1)因为复数$z=m^2-4m-12+(m^2-4)i$，其中$m\in\mathbf{R}$，z在复平面内对应的点在虚轴上且不是原点，所以$\begin{cases}m^2-4m-12=0,\\m^2-4\neq0,\end{cases}$解得$m=6$.

(2)因为$z=m^2-4m-12+(m^2-4)i$在复平面内对应的点为$(m^2-4m-12,m^2-4)$，所以z在复平面内对应的点关于虚轴对称的点为$(-m^2+4m+12,m^2-4)$.

由题意得$\begin{cases}-m^2+4m+12>0,\\m^2-4>0,\end{cases}$解得$2<m<6$，即$m$的取值范围为$(2,6)$.

14. **解**：(1)由题可知点Z的坐标为$(2m-1,m+1)$，
因为点Z在直线$y=2x-6$上，
所以$m+1=2\times(2m-1)-6$，解得$m=3$.
(2)$\overrightarrow{OZ}=(2m-1,m+1)$，$\overrightarrow{OA}=(2,-1)$，
因为$\overrightarrow{OZ}$与$\overrightarrow{OA}$的夹角为钝角，所以$\overrightarrow{OZ}\cdot\overrightarrow{OA}<0$，且$\overrightarrow{OZ}$与$\overrightarrow{OA}$不共线，由$\overrightarrow{OZ}\cdot\overrightarrow{OA}<0$，得$(2m-1,m+1)\cdot(2,-1)<0$，可化为$4m-2-m-1<0$，可得$m<1$.
当两向量共线且方向相反时，设$\overrightarrow{OZ}=\lambda\overrightarrow{OA}$，$\lambda<0$，
即$\begin{cases}2m-1=2\lambda,\\m+1=-\lambda,\end{cases}$解得$\begin{cases}\lambda=-\dfrac{3}{4},\\m=-\dfrac{1}{4},\end{cases}$
所以实数m的取值范围为$\left(-\infty,-\dfrac{1}{4}\right)\cup\left(-\dfrac{1}{4},1\right)$.

15. $\sqrt{5}$ 【解析】因为向量$\overrightarrow{OA}$所对应的复数为$z_1=1+2i$，所以$A(1,2)$，又向量$\overrightarrow{AB}$所对应的复数为$z_2=-3-i$，所以$B(-2,1)$. 因为点C所对应的复数为$z_3=\sqrt{3}-\sqrt{2}i$，所以$C(\sqrt{3},-\sqrt{2})$，又点C与点D关于虚轴对称，所以$D(-\sqrt{3},-\sqrt{2})$. 易知A,B,C,D四点在以$(0,0)$为圆心，$\sqrt{5}$为半径的圆上，故圆M的半径为$\sqrt{5}$.

16. **解**：因为复平面内A,B,C三点对应的复数分别是$-2-i$，$1+i$，$2i$，所以$A(-2,-1)$，$B(1,1)$，$C(0,2)$.
设复平面内点D的坐标为(x,y)，则$\overrightarrow{AB}=(3,2)$，$\overrightarrow{DC}=(-x,2-y)$，因为四边形$ABCD$是平行四边形，
所以$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$，则$\begin{cases}-x=3,\\2-y=2,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=-3,\\y=0,\end{cases}$则$D(-3,0)$，
所以$\overrightarrow{BD}=(-4,-1)$，故$|\overrightarrow{BD}|=\sqrt{(-4)^2+1}=\sqrt{17}$.

7.2 复数的四则运算

7.2.1 复数的加、减运算及其几何意义

1. C 【解析】由题意，$z_1+z_2=(2+i)+(1-2i)=3-i$. 故选C.

2. C 【解析】∵$z=-1-i$，∴$2-z=3+i$，故$|2-z|=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$. 故选C.

3. B 【解析】依题意得$z_2=3-4i$，所以$z_1+z_2=6$. 故选B.

4. C 【解析】由题意得$z=-1+i$，则$z-1=-2+i$，故A，B错误；$z-i=-1$，为实数，故C正确；$z+i=-1+2i$，不是纯虚数，故D错误. 故选C.

5. A 【解析】$z-2\overline{z}=a+bi-2(a-bi)=-a+3bi=2+3\sqrt{3}i$，则$\begin{cases}-a=2,\\3b=3\sqrt{3},\end{cases}$解得$\begin{cases}a=-2,\\b=\sqrt{3},\end{cases}$则复数$z$的虚部为$\sqrt{3}$. 故选A.

6. B 【解析】在复平面内，设复数$1+2i$，$-2+i$，0对应的点分别为$A(1,2)$，$B(-2,1)$，$O(0,0)$，则$\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}$且$|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|$，所以该正方形以$OA$，$OB$为邻边. 设第4个顶点为$D(x,y)$，则$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{OB}$，即$\begin{cases}x-1=-2,\\y-2=1,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=-1,\\y=3,\end{cases}$所以$D(-1,3)$，即第4个顶点对应的复数为$-1+3i$，故选B.

7. B 【解析】由题可知，以OA，OB为邻边所作的平行四边形的对角线相等，则此平行四边形为矩形，故$\triangle AOB$一定是直角三角形. 故选B.

8. AC 【解析】设$z=a+bi(a,b\in\mathbf{R})$，则$\overline{z}=a-bi$，由题意可得$\begin{cases}z-\overline{z}=2bi=-14i,\\|\overline{z}|=\sqrt{a^2+b^2}=5\sqrt{2},\end{cases}$解得$\begin{cases}b=-7,\\a=1\end{cases}$或$\begin{cases}b=-7,\\a=-1,\end{cases}$所以$z=1-7i$或$-1-7i$. 故选AC.

9. ABC 【解析】复数$z_1=2-2i$（i为虚数单位）在复平面内对应的点为P_1，则$P_1(2,-2)$，$\overline{z_1}=2+2i$，故A，B正确；由复数z_2满足$|z_2-i|=1$，可得z_2在复平面内对应的点的集合是以$C(0,1)$为圆心，1为半径的圆，连接CP_1，则$|z_1-z_2|$的最大值为$|CP_1|+1=\sqrt{2^2+(-2-1)^2}+1=\sqrt{13}+1$，最小值为$|CP_1|-1=\sqrt{13}-1$，故C正确，D不正确. 故选ABC.

10. $5+3i$ 【解析】$(1+2i)+(i+i^2)+|3+4i|=(1+2i)+(i-1)+\sqrt{3^2+4^2}=(1+2i)+(i-1)+5=(1-1+5)+(2+1)i=5+3i$.

11. $4+3i$或$4-3i$ 【解析】设$z=a+bi(a,b\in\mathbf{R})$，因为$|z|=5$，所以$a^2+b^2=25$. 因为$z_1-z_2=(2+i)-(2-3i)=4i$，所以复数z_1-z_2的虚部为4. 因为复数z的实部为复数z_1-z_2的虚部，所以$a=4$，又由$a^2+b^2=25$，解得$b=\pm3$，所以$z=4+3i$或$4-3i$.

12. $2\sqrt{3}$ 【解析】方法一：设$z_1=a+bi$，$z_2=c+di$，$a,b,c,d\in\mathbf{R}$. ∵$|z_1|=|z_2|=2$，∴$a^2+b^2=4$，$c^2+d^2=4$. ∵$z_1+z_2=(a+c)+(b+d)i=\sqrt{2}-\sqrt{2}i$，∴$a+c=\sqrt{2}$，$b+d=-\sqrt{2}$，∴$a^2+c^2+2ac+b^2+d^2+2bd=4$，∴$ac+bd=-2$，∴$|z_1-z_2|=|(a-c)+(b-d)i|=\sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2}=\sqrt{a^2+c^2-2ac+b^2+d^2-2bd}=\sqrt{a^2+c^2+b^2+d^2-2(ac+bd)}=2\sqrt{3}$.
方法二：设$z_1=a+bi$，$z_2=c+di$，$a,b,c,d\in\mathbf{R}$. ∵$z_1+z_2=(a+c)+(b+d)i=\sqrt{2}-\sqrt{2}i$，∴$|z_1+z_2|=2$，即$|z_1|=|z_2|=|z_1+z_2|=2$，设$O$为坐标原点，$z_1$，$z_2$，$z_1+z_2$在复平面内对应的点分别为$A,B,C$，连接$OA,OB,OC,AC,BC,AB$. ∵$|z_1|=|z_2|=|z_1+z_2|=2$，∴$\triangle OAC$是边长为2的正三角形，∴四边形$OACB$是一个内角为$60°$，边长为2的菱形，且$|z_1-z_2|$是菱形的较长的对角线$AB$的长，∴$|z_1-z_2|=|AB|=\sqrt{|OA|^2+|OB|^2-2|OA||OB|\cos120°}=2\sqrt{3}$.

13. **解**：(1)$\left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{2}i\right)+(2-i)-\left(\dfrac{4}{3}-\dfrac{3}{2}i\right)=\left(\dfrac{1}{3}+2-\dfrac{4}{3}\right)+\left(\dfrac{1}{2}-1+\dfrac{3}{2}\right)i=1+i$.
(2)∵$z_1=2+3i$，$z_2=-1+2i$，∴$z_1+z_2=2+3i+(-1+2i)=1+5i$，$z_1-z_2=2+3i-(-1+2i)=3+i$.

14. **解**：(1)∵在复平面内，向量$\overrightarrow{BA}$对应的复数为$1+2i$，
向量$\overrightarrow{BC}$对应的复数为$3-i$，∴$\overrightarrow{BA}=(1,2)$，$\overrightarrow{BC}=(3,-1)$，
∴$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}=(1,2)+(3,-1)=(4,1)$，
易知点A的坐标为$(2,1)$，则设O为坐标原点，
则$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{BA}=(2,1)-(1,2)=(1,-1)$，
∴$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BD}=(1,-1)+(4,1)=(5,0)$，
∴点D对应的复数为5.
(2)∵$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BC}|\cos B$，
∴$\cos B=\dfrac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BC}|}=\dfrac{3-2}{\sqrt{5}\times\sqrt{10}}=\dfrac{1}{5\sqrt{2}}$.
∵$B\in(0,\pi)$，∴$\sin B=\dfrac{7}{5\sqrt{2}}$，∴平行四边形$ABCD$的面积为$|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BC}|\sin B=\sqrt{5}\times\sqrt{10}\times\dfrac{7}{5\sqrt{2}}=7$.

15. $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ 【解析】设复数$z=a+bi(a,b\in\mathbf{R})$，则$Z(a,b)$，$z-1=a-1+bi$，$z+i=a+(b+1)i$，∵$|z-1|=|z+i|$，

∴ $\sqrt{(a-1)^2+b^2}=\sqrt{a^2+(b+1)^2}$，整理得 $a+b=0$，又 $z_0=2+i$ 在复平面内对应的点为 $Z_0(2,1)$，∴点 Z_0 与点 Z 之间的距离 $d=\sqrt{(a-2)^2+(b-1)^2}=\sqrt{2\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9}{2}}$，

∴$d_{\min}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

16. 解：(1)设 $z=a+bi(a,b\in\mathbf{R})$，因为 $(3,\bar{z})\begin{bmatrix}z\\4\end{bmatrix}=3z+4\bar{z}=3(a+bi)+4(a-bi)=7a-bi=7-3i$，

所以 $\begin{cases}7a=7,\\b=3,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}a=1,\\b=3,\end{cases}$

则 $z=1+3i$，故 $|z|=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$.

(2) $(y+\sin 2x,2)\begin{bmatrix}i\\y\end{bmatrix}-(1,\sin^2 x)\begin{bmatrix}\sin x\\2\sqrt{3}i\end{bmatrix}=(2y-\sin x)+(y+\sin 2x-2\sqrt{3}\sin^2 x)i$ 为实数，则 $y+\sin 2x-2\sqrt{3}\sin^2 x=0$，所以 $y=-\sin 2x+2\sqrt{3}\sin^2 x=-\sin 2x+2\sqrt{3}\times\frac{1-\cos 2x}{2}=-(\sin 2x+\sqrt{3}\cos 2x)+\sqrt{3}=-2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+\sqrt{3}$.

7.2.2 复数的乘、除运算

1. C 【解析】∵$z=(2+i)^2=4+4i+i^2=3+4i$，∴z 的虚部为4.故选C.
2. C 【解析】$\frac{3-i}{1-i}=\frac{(3-i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=2+i$.故选C.
3. D 【解析】因为$(1-i)(2+i)=2+i-2i-i^2=3-i$，所以复数$(1-i)(2+i)$的模为$\sqrt{3^2+(-1)^2}=\sqrt{10}$.故选D.
4. A 【解析】由 $z(1+i)=|\sqrt{3}-i|=\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-1)^2}=2$，得 $z=\frac{2}{1+i}=\frac{2(1-i)}{(1+i)(1-i)}=1-i$，则 $\bar{z}=1+i$，所以 z 的共轭复数在复平面内对应的点的坐标为(1,1)，该点位于第一象限.故选A.
5. A 【解析】方法一：由题意得 $2(-2+i)^2+m(-2+i)+n=0$，化简得 $-2m+n+6+(m-8)i=0$，所以 $\begin{cases}-2m+n+6=0,\\m-8=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}m=8,\\n=10,\end{cases}$ 所以 $m+n=18$.故选A.
方法二：因为$-2+i$是关于x的实系数方程$2x^2+mx+n=0$的一个根，所以$-2-i$也是方程$2x^2+mx+n=0$的根，所以由根与系数的关系得$-2+i-2-i=-\frac{m}{2}$，$(-2+i)(-2-i)=\frac{n}{2}$，解得$m=8,n=10$，所以$m+n=18$.
6. C 【解析】由题意可知，$\begin{vmatrix}z&1+i\\-i&2i\end{vmatrix}=0$，则 $z\cdot 2i-(-i)\times(1+i)=0$，可得 $z=\frac{1-i}{2i}=\frac{(1-i)\times(-i)}{2i\times(-i)}=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$，所以复数$z$在复平面内对应的点的坐标为$\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$，该点位于第三象限.故选C.
7. AD 【解析】设 $z_1=a+bi,z_2=c+di(a,b,c,d\in\mathbf{R})$，则 $z_1\bar{z}_1=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2$，$|z_1|^2=a^2+b^2$，故A正确；$z_2^2=(c+di)^2=c^2-d^2+2cdi$，而$|z_2|^2=c^2+d^2$，故B错误；当$z_1=0$，$z_2(z_2\neq0)$取任意的复数时，都有$z_1z_2=|z_1|^2$，但$\bar{z}_1\neq z_2$，故C错误；$|z_1+2i|$的几何意义为单位圆上的点与点$(0,-2)$之间的距离，易知$|z_1+2i|$的最大值为3，故D正确.故选AD.
8. BC 【解析】根据题意，$M=\{m|m=i^n,n\in\mathbf{N}^*\}$，当$n=4k+1(k\in\mathbf{N})$时，$i^n=i$，当$n=4k+2(k\in\mathbf{N})$时，$i^n=-1$，当$n=4k+3(k\in\mathbf{N})$时，$i^n=-i$，当$n=4k+4(k\in\mathbf{N})$时，$i^n=1$，∴$M=\{-1,1,i,-i\}$.对于选项A，$(1-i)(1+i)=2\notin M$；对于选项B，$\frac{1-i}{1+i}=\frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}=-i\in M$；对于选项C，$\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=i\in M$；对于选项D，$(1-i)^2=-2i\notin M$.故选BC.
9. $\frac{\sqrt{10}}{2}$ 【解析】因为$(1-i)z=2i-1$，所以$z=\frac{2i-1}{1-i}=\frac{(2i-1)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{2i+2i^2-1-i}{2}=\frac{-3+i}{2}$，所以$|z|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{-3}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{10}}{2}$.
10. $1+2i$(答案不唯一) 【解析】设$z=a+bi(a,b\in\mathbf{R},b\neq0)$，则$z^2+3=(a+bi)^2+3=a^2-b^2+3+2abi$为纯虚数，∴$a^2-b^2+3=0$且$2ab\neq0$，可取$a=1,b=2$，此时$z=1+2i$.
11. $\frac{3}{4}$ 【解析】∵$z\cdot\bar{z}=|z|^2=1$，∴$|z|=1$，即$\frac{|b|}{\sqrt{a^2+1}}=1$，∴$b^2=a^2+1$，∴$b^2+a=a^2+a+1=\left(a+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\geqslant\frac{3}{4}$，∴$b^2+a$的最小值为$\frac{3}{4}$.
12. 解：原式$=(2-3i)\cdot\frac{1-i^2}{1-i}+\left(\frac{-2i}{2}\right)^4+\left[\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2\right]^4=(2-3i)(1+i)+1+1=5-i+1+1=7-i$.
13. 解：(1)∵$x=1-\sqrt{3}i$是该方程的根，∴$1+\sqrt{3}i$也是该方程的根，由一元二次方程根与系数的关系得$1-\sqrt{3}i+1+\sqrt{3}i=a$，$(1-\sqrt{3}i)(1+\sqrt{3}i)=ab$，解得$a=2,b=2$.
(2)证明：∵$\frac{b}{a}>\frac{1}{4}$，且$a>0$，∴$\frac{b}{a}-\frac{1}{4}=\frac{4b-a}{4a}>0$，
∴$4a(4b-a)>0$，即$4ab-a^2>0$，
∴$\Delta=a^2-4ab<0$，∴原方程无实数根.
14. 解：(1)因为$z_1=(a+i)^2$，$z_2=4-3i$，$z_1=iz_2$，所以$(a+i)^2=a^2-1+2ai=3+4i$，所以$\begin{cases}a^2-1=3,\\2a=4,\end{cases}$解得$a=2$，故实数$a$的值为2.
(2)依题意得$\frac{z_1}{z_2}=\frac{(a+i)^2}{4-3i}=\frac{(a^2+2ai-1)(4+3i)}{25}=\frac{(4a^2-6a-4)+(3a^2+8a-3)i}{25}$，因为$\frac{z_1}{z_2}$是纯虚数，所以$\begin{cases}4a^2-6a-4=0,\\3a^2+8a-3\neq0,\end{cases}$解得$a=2$或$a=-\frac{1}{2}$，又因为$a$是正实数，所以$a=2$，所以$\frac{z_1}{z_2}=i$，所以$\frac{z_1}{z_2}+\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2+\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^3+\cdots+\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2024}=i+i^2+i^3+i^4+\cdots+i^{2024}=(i+i^2+i^3+i^4)+(i^5+i^6+i^7+i^8)+\cdots+(i^{2021}+i^{2022}+i^{2023}+i^{2024})=(i-1-i+1)+(i-1-i+1)+\cdots+(i-1-i+1)=0+0+\cdots+0=0$.

滚动习题（四）

1. C 【解析】由题意，得$\begin{cases}4-m^2=0,\\m-2\neq0,\end{cases}$解得$m=-2$，故选C.
2. A 【解析】$(1+i)(1-i)^2=(1+i)(1^2-2i+i^2)=-2i(1+i)=2-2i$.故选A.
3. A 【解析】因为$z=2+3i$，所以$\bar{z}=2-3i$，所以$z-\bar{z}=(2+3i)-(2-3i)=6i$，因此$|z-\bar{z}|=|6i|=6$.故选A.
4. D 【解析】$z=\frac{1-3i}{1+i^7}=\frac{1-3i}{1-i}=\frac{(1-3i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=2-i$，则$z$在复平面内对应的点$(2,-1)$位于第四象限.故选D.
5. D 【解析】由复数相等的充要条件可得$\begin{cases}-b=3,\\a-1=-2,\end{cases}$解得$\begin{cases}a=-1,\\b=-3,\end{cases}$所以$z=(1+i)^{a-b}=(1+i)^2=2i$，$z$的虚部是2，所以A中结论正确；$|z|=|2i|=2$，所以B中结论正确；$\bar{z}=-2i$，所以C中结论正确；$z$在复平面内对应的点在虚轴上，所以D中结论错误.故选D.
6. C 【解析】设$z=a+bi(a,b\in\mathbf{R}$且$b\neq0)$，由题可得$a^2-b^2-2a+m+(2ab-2b)i=0$，所以$\begin{cases}a^2-b^2-2a+m=0,\\2ab-2b=0,\end{cases}$可得$\begin{cases}-b^2-1+m=0,\\a=1,\end{cases}$因为$|z|=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{2}$，所以$b^2=1$，

$m=2$. 故选 C.

7. AD 【解析】当 $k=2n$, $n\in\mathbf{Z}$ 时, $z=\frac{1+i^{4n+1}}{2+i}=\frac{1+i}{2+i}=\frac{(1+i)(2-i)}{(2+i)(2-i)}=\frac{3+i}{5}$, z 在复平面内对应的点位于第一象限; 当 $k=2n+1$, $n\in\mathbf{Z}$ 时, $z=\frac{1+i^{4n+3}}{2+i}=\frac{1-i}{2+i}=\frac{(1-i)(2-i)}{(2+i)(2-i)}=\frac{1-3i}{5}$, z 在复平面内对应的点位于第四象限. 故选 AD.

8. BCD 【解析】设 $z_1=a+bi$, $z_2=c+di(a,b,c,d\in\mathbf{R})$, 则 $z_1+z_2=a+c+(b+d)i$, 所以 $|z_1+z_2|=\sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2}$, $|z_1|+|z_2|=\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2}$, 则 $|z_1+z_2|=|z_1|+|z_2|$ 不一定成立, 故 A 错误; $|z_1\cdot z_2|=|(a+bi)(c+di)|=|ac-bd+(ad+bc)i|=\sqrt{(ac-bd)^2+(ad+bc)^2}=\sqrt{(ac)^2+(bd)^2+(ad)^2+(bc)^2}$, $|z_1|\cdot|z_2|=\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{c^2+d^2}=\sqrt{(ac)^2+(ad)^2+(bc)^2+(bd)^2}$, 所以 $|z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$, 故 B 正确; 因为 $\overline{z_1+z_2}=a+c-(b+d)i$, $\overline{z_1}+\overline{z_2}=a+c-(b+d)i$, 所以 $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$, 故 C 正确; 因为 $z_1\cdot z_2=(a+bi)(c+di)=ac-bd+(ad+bc)i$, 所以 $\overline{z_1\cdot z_2}=ac-bd-(ad+bc)i$, 而 $\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}=(a-bi)(c-di)=ac-bd-(ad+bc)i$, 所以 $\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$, 故 D 正确. 故选 BCD.

9. $\frac{1}{2}$ 【解析】$z=(1+bi)(2-i)=2+b+(2b-1)i$, 由 $z=(1+bi)(2-i)$ 是实数, 得 $2b-1=0$, 解得 $b=\frac{1}{2}$.

10. 1 【解析】由 $(1+i)z=1+3i$, 得 $z=\frac{1+3i}{1+i}=\frac{(1+3i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{4+2i}{2}=2+i$, 故 z 的虚部为 1.

11. 19 【解析】由 $z+|\overline{z}|=8+4i$ 可设 $z=a+4i$, $a\in\mathbf{R}$, 则 $a+4i+\sqrt{a^2+(-4)^2}=8+4i$, 所以 $a+\sqrt{a^2+16}=8$, 所以 $a=3$, 所以 $z=3+4i$, 代入 $x^2+bx+c=0$ 得 $(3+4i)^2+3b+4bi+c=0$, 即 $3b+c-7+(4b+24)i=0$, 所以 $\begin{cases}3b+c-7=0,\\4b+24=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}b=-6,\\c=25,\end{cases}$ 所以 $b+c=19$.

12. 4 【解析】设复数 z 在复平面内对应的点为 Z, ∵ $|z|=1$, ∴ 点 Z 在以原点为圆心, 1 为半径的圆上. $|z-3-4i|$ 表示点 Z 与点 $(3,4)$ 之间的距离, ∵ 原点到点 $(3,4)$ 的距离 $d=5$, ∴ $|z-3-4i|$ 的最小值为 $5-1=4$.

13. 解: (1) ∵ z 为实数, ∴ $m^2-9=0$, 解得 $m=\pm3$.

(2) ∵ z 为纯虚数, ∴ $\begin{cases}m^2-2m-15=0,\\m^2-9\neq0,\end{cases}$ 解得 $m=5$, ∴ $z=16i$, ∴ $\frac{z}{1+i}=\frac{16i}{1+i}=\frac{16i(1-i)}{(1+i)(1-i)}=8i(1-i)=8+8i$, 故 $\frac{z}{1+i}$ 的虚部为 8.

14. 解: (1) 依题意, 点 $(1,b)$ 在第四象限, 则 $b<0$, 由 $z\overline{z}=4$, 得 $(1+bi)(1-bi)=4$, 即 $b^2=3$, 所以 $b=-\sqrt{3}$.

(2) 由 (1) 知, $z=1-\sqrt{3}i$, 由复数 z 是关于 x 的方程 $px^2+2x+q=0$ 的根, 得 $p(1-\sqrt{3}i)^2+2(1-\sqrt{3}i)+q=0$, 整理得 $(-2p+q+2)+(-2\sqrt{3}p-2\sqrt{3})i=0$, 而 $p,q\in\mathbf{R}$, 因此 $\begin{cases}-2p+q+2=0,\\-2\sqrt{3}p-2\sqrt{3}=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}p=-1,\\q=-4,\end{cases}$ 所以 $p+q=-5$.

15. 解: (1) 在复平面中, 由 O 为坐标原点, $A(3,2)$, $C(-2,4)$, 得 $\overrightarrow{OA}=(3,2)$, $\overrightarrow{OC}=(-2,4)$. 连接 OB, ∵ 四边形 $OABC$ 为平行四边形, ∴ $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=(3,2)+(-2,4)=(1,6)$, ∴ 点 B 的坐标为 $(1,6)$, 则点 B 对应的复数为 $1+6i$.

(2) 由已知及 (1) 得 $z_1=3+2i$, $z_2=1+6i$, $z_3=-2+4i$.

① 由 $z\cdot z_3=z_1\cdot z_2$, 得 $z=\frac{z_1\cdot z_2}{z_3}=\frac{(3+2i)(1+6i)}{-2+4i}=\frac{(-9+20i)(-1-2i)}{10}=\frac{49}{10}-\frac{1}{5}i$.

② 设 $z=x+yi$, $x,y\in\mathbf{R}$, 由 $|z-z_1|=|z-z_2|$, 得 $\sqrt{(x-3)^2+(y-2)^2}=\sqrt{(x-1)^2+(y-6)^2}$, 整理得 $x-2y+6=0$, ∴ $x=2y-6$,

∴ $|z-z_3|=\sqrt{(x+2)^2+(y-4)^2}=\sqrt{(2y-4)^2+(y-4)^2}=\sqrt{5y^2-24y+32}=\sqrt{5\left(y-\frac{12}{5}\right)^2+\frac{16}{5}}$, ∴ 当 $y=\frac{12}{5}$ 时, $|z-z_3|$ 取得最小值, 最小值为 $\frac{4\sqrt{5}}{5}$.

7.3* 复数的三角表示

7.3.1 复数的三角表示式

7.3.2 复数乘、除运算的三角表示及其几何意义

1. A 【解析】因为 $1-\sqrt{3}i=2\times\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=2\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$, 所以 $1-\sqrt{3}i$ 的辐角的主值是 $\frac{5\pi}{3}$.

2. B 【解析】因为 $\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$, 所以 $\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i=\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}$, 故选 B.

3. D 【解析】$z^2=(\sqrt{2})^2\times\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)=2i$, 故选 D.

4. A 【解析】因为 $\arg i=\frac{\pi}{2}$, $\overrightarrow{ON}$ 绕原点 O 按顺时针方向旋转 $\frac{\pi}{3}$, 得到 $\overrightarrow{OM}$, 则 $\overrightarrow{OM}$ 对应的复数的辐角的主值为 $\frac{\pi}{6}$, 所以 $\overrightarrow{OM}$ 对应的复数是 $\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$. 故选 A.

5. A 【解析】$\frac{12\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right)}{6\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)}=2\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)=2\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=-1-\sqrt{3}i$. 故选 A.

6. B 【解析】$z_2=\left(\frac{1}{2}z_1\right)^2=\frac{1}{4}z_1^2=\frac{1}{4}(-1+\sqrt{3}i)^2=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$, 则复数 z_2 在复平面内对应的点的坐标是 $\left(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, 该点位于第三象限, 且 $\tan\theta=\sqrt{3}$, 所以 $\arg z_2=\frac{4\pi}{3}$. 故选 B.

7. ABC 【解析】∵ $z=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$, ∴ $|z|=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}=1$, 故 A 正确; $\overline{z}=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i=\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}$, 故 B 正确; ∵ $z^3=\cos\frac{6\pi}{3}+i\sin\frac{6\pi}{3}=1$, ∴ $z^3-1=0$, 故 C 正确; ∵ $-z=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$, ∴ 复数 $-z$ 的辐角的主值为 $\frac{5\pi}{3}$, 故 D 错误. 故选 ABC.

8. $\sqrt{2}$ $\frac{\pi}{4}$ $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ 【解析】复数 $1+i$ 的模是 $\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$. ∵ $1+i$ 对应的点在第一象限, 且 $\tan\theta=1$, ∴ $\arg(1+i)=\frac{\pi}{4}$, ∴ 三角形式为 $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$.

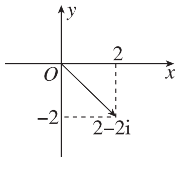
9. -243 【解析】$\left[3\left(\cos\frac{\pi}{5}+i\sin\frac{\pi}{5}\right)\right]^5=3^5\left[\cos\left(5\times\frac{\pi}{5}\right)+i\sin\left(5\times\frac{\pi}{5}\right)\right]=243(\cos\pi+i\sin\pi)=-243$.

10. $-\frac{3\sqrt{2}}{2}-\frac{3\sqrt{2}}{2}i$ 【解析】因为 $-2i=2\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$, 所以由题意可得 $\overrightarrow{OZ_1}$ 对应的复数为 $2\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right)\cdot\frac{3}{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]=3\left[\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right]=3\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)=3\times\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-\right.$

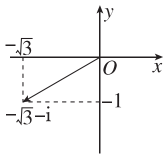
$\left.\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}\right)=-\frac{3\sqrt{2}}{2}-\frac{3\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}$.

11. **解**：(1)复数 $2-2\mathrm{i}$ 所对应的向量如图①所示，则 $r=\sqrt{2^2+(-2)^2}=2\sqrt{2}$，$\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$. 因为与 $2-2\mathrm{i}$ 对应的点在第四象限，所以 $\arg(2-2\mathrm{i})=\frac{7\pi}{4}$，

所以 $2-2\mathrm{i}=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{7\pi}{4}\right)$.



①



②

(2)复数 $-\sqrt{3}-\mathrm{i}$ 所对应的向量如图②所示，

则 $r=\sqrt{(-\sqrt{3})^2+(-1)^2}=2$，$\cos\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

因为与 $-\sqrt{3}-\mathrm{i}$ 对应的点在第三象限，

所以 $\arg(-\sqrt{3}-\mathrm{i})=\frac{7\pi}{6}$，

所以 $-\sqrt{3}-\mathrm{i}=2\left(\cos\frac{7\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{7\pi}{6}\right)$.

12. **解**：设模为 1 的复数为 $z=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$，则 $z^3=(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)^3=\cos^3\theta+3(\cos^2\theta)\cdot(\mathrm{i}\sin\theta)+3(\cos\theta)\cdot(\mathrm{i}\sin\theta)^2+(\mathrm{i}\sin\theta)^3=\cos^3\theta+\mathrm{i}(3\cos^2\theta\cdot\sin\theta)-3\cos\theta\sin^2\theta-\mathrm{i}\sin^3\theta=(\cos^3\theta-3\cos\theta\sin^2\theta)+\mathrm{i}(3\cos^2\theta\cdot\sin\theta-\sin^3\theta)=[\cos^3\theta-3\cos\theta(1-\cos^2\theta)]+\mathrm{i}[3(1-\sin^2\theta)\sin\theta-\sin^3\theta]=(4\cos^3\theta-3\cos\theta)+\mathrm{i}(3\sin\theta-4\sin^3\theta)$，

由复数乘方公式可得 $z^3=\cos 3\theta+\mathrm{i}\sin 3\theta$，

故 $\sin 3\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta$，$\cos 3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta$.

第八章　立体几何初步

8.1　基本立体图形

第 1 课时　多面体

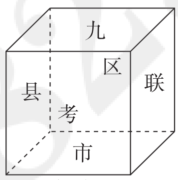
1. A　**[解析]** 由棱锥的定义可知，三棱锥的侧面和底面均是三角形. 故选 A.

2. B　**[解析]** 由于在斜四棱柱的底面中最多有两条平行的对边和侧棱垂直，其余一组对边不和侧棱垂直，故此时四棱柱的侧面中最多有 2 个为矩形，且这两个侧面为相对的面，其余一组相对的侧面不可能为矩形，故选 B.

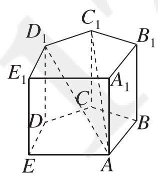
3. D　**[解析]** 对于 A，正六棱柱的两个相对的侧面互相平行，但不是棱柱的底面，故 A 错误；对于 B，平行六面体任意两个相对的面一定可当作它的底面，故 B 错误；对于 C，平行六面体的侧面是平行四边形，底面也是平行四边形，故 C 错误；对于 D，棱柱的底面互相平行，故在棱柱的所有面中，至少有两个面互相平行，故 D 正确. 故选 D.

4. C　**[解析]** A 中的几何体是棱柱；B 中的几何体是棱锥；D 中的几何体的棱 AA'，BB'，CC'，DD' 延长后没有交于一点，故 D 中的几何体不是棱台；C 中的几何体是一个棱锥被平行于底面的平面截去一个棱锥后剩余的部分，符合棱台的定义，故 C 中的几何体是棱台. 故选 C.

5. B　**[解析]** 把正方体还原，如图所示，则上面是九，下面是市，左面是县，右面是联，前面是考，后面是区. 故选 B.



6. D　**[解析]** 如图，在五棱柱 $ABCDE$-$A_1B_1C_1D_1E_1$ 中，从顶点 A 出发的对角线有 2 条，为 AC_1，AD_1. 同理从点 B，C，D，E 出发的对角线均有 2 条，则共有 $2\times5=10$(条)对角线.



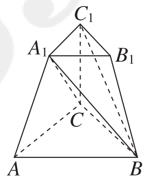
7. C　**[解析]** 根据棱台是由棱锥截成的进行判断. 选项 A 中，$\frac{A_1B_1}{AB}\neq\frac{B_1C_1}{BC}$，故 A 不可能是三棱台；选项 B 中，$\frac{B_1C_1}{BC}\neq\frac{A_1C_1}{AC}$，故 B 不可能是三棱台；选项 C 中，$\frac{A_1B_1}{AB}=\frac{B_1C_1}{BC}=\frac{A_1C_1}{AC}$，故 C 可能是三棱台；选项 D 中，满足条件的可能是三棱柱，不可能是三棱台. 故选 C.

8. B　**[解析]** 设长方体中过同一个顶点的三条棱的长分别为 a，b，c，则 $ab=8$，$bc=12$，$ac=24$，可得 $a=4$，$b=2$，$c=6$，∴长方体的最短棱的长为 2，则长方体可削成最大的正方体的棱长为 2，∴正四面体的棱长的最大值为正方体的面对角线的长，其长度为 $2\sqrt{2}$. 故选 B.

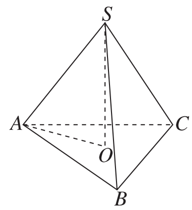
9. ABC　**[解析]** 对于 A，B，四棱柱、四棱台都有 2 个底面，4 个侧面，共 6 个面，它们都是六面体，A，B 正确；对于 C，五棱锥有 1 个底面，5 个侧面，共 6 个面，是六面体，C 正确；对于 D，六棱锥有 1 个底面，6 个侧面，共 7 个面，不是六面体，D 不正确. 故选 ABC.

10. 五　12　**[解析]** 因为棱柱有 10 个顶点，所以此棱柱为五棱柱，共有 5 条侧棱，又所有侧棱的长之和为 60 cm，所以每条侧棱的长为 12 cm.

11. 3　**[解析]** 如图，三棱台 ABC-$A_1B_1C_1$ 可分割成三棱锥 A_1-ABC、三棱锥 B-A_1CC_1 和三棱锥 C_1-A_1B_1B，共 3 个三棱锥.



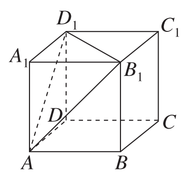
12. 3　**[解析]** 如图所示，在正三棱锥 S-ABC 中，点 O 为 $\triangle ABC$ 的中心，连接 OA，SO，则 SO 为正三棱锥的高，则 $SO=\sqrt{6}$，$AB=3$. 易知 $OA=\sqrt{3}$，故在 $\mathrm{Rt}\triangle SOA$ 中，$SA=\sqrt{AO^2+SO^2}=3$.



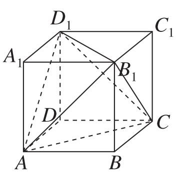
13. **解**：(1)如图①所示，三棱锥 A_1-AB_1D_1 符合题意(答案不唯一).

(2)如图②所示，三棱锥 B_1-ACD_1 符合题意(答案不唯一).

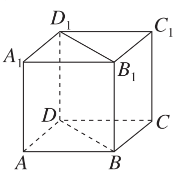
(3)如图③所示，三棱柱 $A_1B_1D_1$-ABD 符合题意(答案不唯一).



①



②

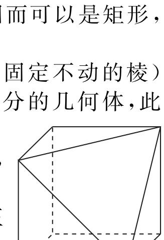


③

14. **解**：(1)不对. 水面的形状就是用一个与棱(倾斜时固定不动的棱)平行的平面截长方体时截面的形状，因而可以是矩形，但不可能是其他非矩形的平行四边形.

(2)不对. 水的形状就是用一个与棱(倾斜时固定不动的棱)平行的平面将长方体截去一部分后，剩余部分的几何体，此几何体是棱柱，不可能是棱台或棱锥.

15. B　**[解析]** 还原该多面体，如图. 由图可知，该多面体有 7 个顶点. 故选 B.



16. **解**：(1)根据题意得，四面体的棱数 $a=6$，正八面体的顶点数 $b=6$.

∵$4+4-6=2$，$8+6-12=2$，$6+8-12=2$，$20+12-30=2$，∴顶点数(V)、面数(F)、棱数(E)之间存在的关系式是 $V+F-E=2$.

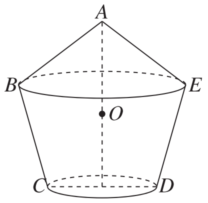
(2)由(1)可知，$V+F-E=2$，∵一个多面体的面数比顶点数小 8，且有 30 条棱，∴$V+V-8-30=2$，解得 $V=20$，故这个多面体的顶点数为 20.

(3)∵有 48 个顶点，每个顶点处都有 3 条棱，两点确定一条

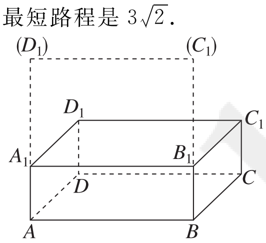
直线，∴共有 $48\times3\div2=72$(条)棱.设该多面体的面数为 F，则 $48+F-72=2$，解得 $F=26$，∴$x+y=26$.

第 2 课时　旋转体、组合体

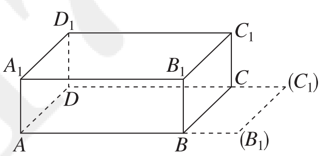
1. A　【解析】由圆锥的定义可知 A 正确.故选 A.
2. C　【解析】由圆柱、圆锥、圆台的定义可知，①是圆柱，②不是圆台，③是圆锥，④是圆锥与圆台的组合体.故选 C.
3. C　【解析】螺母这个组合体的外部轮廓是六棱柱，因为螺母是旋拧在螺杆上的，所以挖去的部分近似是圆柱，故选 C.
4. B　【解析】将等腰梯形 $ABCD$ 绕着它的较长底边 CD 所在的直线旋转一周，易知所得的几何体为一个圆柱和两个圆锥的组合体.故选 B.
5. B　【解析】由图可得，该几何体的面是等边三角形或正方形，A 中结论正确；该几何体恰有 14 个面，B 中结论不正确；该几何体恰有 24 条棱，C 中结论正确；该几何体恰有 12 个顶点，D 中结论正确.故选 B.
6. C　【解析】设底面半径为 r.若矩形的长为卷成圆柱底面的周长，则 $2\pi r=8$，解得 $r=\frac{4}{\pi}$；若矩形的宽为卷成圆柱底面的周长，则 $2\pi r=4$，解得 $r=\frac{2}{\pi}$.故选 C.
7. C　【解析】截面图形应为选项 C 中的图形.
8. B　【解析】由组合体的结构特征知，球与正方体各面相切，与各棱相离，故选 B.
9. AB　【解析】一个八棱柱有 10 个面，A 正确；在四面体内部选一点，与四个顶点连线，则可以割成 4 个棱锥，B 正确；只有过圆锥的顶点才有无数条母线，C 不正确；矩形绕其一边所在直线旋转一周一定形成一个圆柱，D 不正确.故选 AB.
10. 由一个圆台和一个圆锥组合而成的简单组合体　【解析】由题意可知形成如图所示的几何体，该几何体是由一个圆台和一个圆锥组合而成的简单组合体.



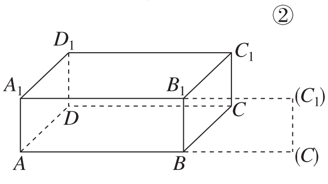
11. 圆柱(圆锥、球、圆台均可)　【解析】用一个平面去截一个几何体，得到的截面是一个圆面，则这个几何体可能是圆锥，也可能是圆柱，也可能是球，也可能是圆台.
12. $3\sqrt{2}$　【解析】如图①，将面 ABB_1A_1 和面 $A_1B_1C_1D_1$ 沿 A_1B_1 展开到同一平面内，此时 A，C_1 之间的距离为 $\sqrt{3^2+(2+1)^2}=3\sqrt{2}$.如图②，将面 $ABCD$ 和面 BCC_1B_1 沿 BC 展开到同一平面内，此时 A，C_1 之间的距离为 $\sqrt{(3+1)^2+2^2}=2\sqrt{5}$.如图③，将面 ABB_1A_1 和面 BCC_1B_1 沿 BB_1 展开到同一平面内，此时 A，C_1 之间的距离为 $\sqrt{(3+2)^2+1^2}=\sqrt{26}$.∵ $\sqrt{26}>2\sqrt{5}>3\sqrt{2}$，∴小虫爬行的最短路程是 $3\sqrt{2}$.



①

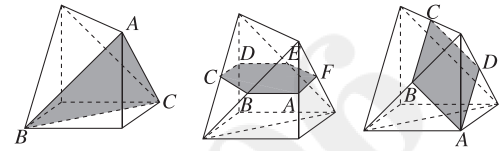


②



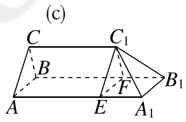
③

13. 解：图①所示的几何体是由两个圆台拼接而成的组合体；图②所示的几何体是由一个圆台挖去一个圆锥得到的组合体；图③所示的几何体是在一个圆柱中挖去一个三棱柱得到的组合体.
14. 解：当 $AD>BC$ 时，四边形 $ABCD$ 绕直线 EF 旋转一周所得几何体是由底面半径为 CD 的圆柱和底面半径为 CD 的圆锥拼接而成的组合体；当 $AD=BC$ 时，四边形 $ABCD$ 绕直线 EF 旋转一周所得几何体是圆柱；
当 $AD<BC$ 时，四边形 $ABCD$ 绕直线 EF 旋转一周所得几何体是从圆柱中挖去一个同底的圆锥而得到的.
15. ①②⑤　【解析】如图(a)所示的截面中，$AB=AC=BC=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$，所对应的图形为题图①；过棱的中点，作平行于底面的截面，如图(b)所示，则 $AB=AF=CD=DE=\frac{1}{2}\times2=1$，$BC=EF=\frac{1}{2}\times2\sqrt{2}=\sqrt{2}$，所对应的图形为题图②；连接正方体三条面对角线的中点与底面的一个顶点，得到如图(c)所示的截面，则 $BC=CD=AD=AB=\frac{1}{2}\times2\sqrt{2}=\sqrt{2}$，所对应的图形为题图⑤；对于题图③，它是边长为 $2\sqrt{2}$ 的正方形，正方体的面对角线长为 $2\sqrt{2}$，显然在图中找不到边长为 $2\sqrt{2}$ 的正方形截面，故题图③不符合题意；对于题图④，两腰长为 $2\sqrt{2}$，为正方体的面对角线长，过正方体的两条面对角线的截面与几何体的另一条交线也为面对角线，即长度也为 $2\sqrt{2}$，故题图④也不符合题意.



(a)　(b)　(c)

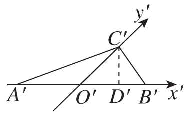
16. 解：因为这个几何体中没有两个互相平行的面，所以这个几何体不是棱柱.



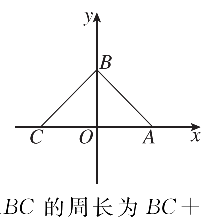
如图，在 AA_1 上取一点 E，使 $AE=2$，在 BB_1 上取一点 F，使 $BF=2$，连接 C_1E，EF，C_1F，则过点 C_1，E，F 的截面将原几何体分成两部分.其中一部分是三棱柱 $ABC\text{-}EFC_1$，其侧棱长为 2；另一部分是四棱锥 $C_1\text{-}EA_1B_1F$，即截去的几何体是四棱锥.

8.2　立体图形的直观图

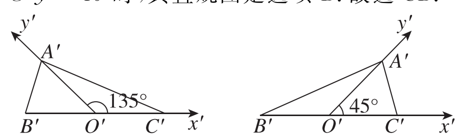
1. D　【解析】根据斜二测画法的规则，$\angle x'O'y'$ 的度数应为 $45°$ 或 $135°$，$\angle x'O'z'$ 指的是画立体图形时的 x' 轴与 z' 轴的夹角，所以度数为 $90°$.故选 D.
2. B　【解析】根据斜二测画法可知，平行关系不变，即原图中平行，直观图中也平行，原图中相交，直观图中也相交，但相对应的角度会改变，原来共点的仍共点.故选 B.
3. C　【解析】∵ $AB\parallel x$ 轴，$CD\parallel y$ 轴，∴$AB=A'B'$，$CD=2C'D'$，∴$A'B'=AB=2CD=2\times2C'D'=4C'D'$，故选 C.
4. D　【解析】易知△ABC 是直角三角形，且 $AC=2AB$，故△ABC 不是等腰直角三角形，故选 D.
5. A　【解析】正三角形 ABC 的直观图为△$A'B'C'$，如图.由题意知 $A'B'=2$，$O'C'=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\angle C'O'B'=45°$，过点 C' 作 $C'D'\perp A'B'$，垂足为 D'，则 $C'D'=\frac{\sqrt{6}}{4}$，所以△$A'B'C'$ 的面积为 $\frac{1}{2}\times2\times\frac{\sqrt{6}}{4}=\frac{\sqrt{6}}{4}$.故选 A.



6. D　【解析】圆锥顶点到底面的距离即为圆锥的高，故两个顶点之间的距离为 $2+3=5$(cm)，在直观图中与 z 轴平行的线段长度不变，仍为 5 cm.故选 D.
7. D　【解析】根据题意，将△$A'B'C'$ 还原成△ABC，如图.对于 A，在△ABC 中，有 $OC=OA=OB=2$，易得 $BC=AB=2\sqrt{2}$，$AC=4$，故△ABC 是等腰直角三角形，A 错误；对于 B，△ABC 的面积是△$A'B'C'$ 面积的 $2\sqrt{2}$ 倍，B 错误；对于 C，B 点的坐标为$(0,2)$，C 错误；对于 D，△ABC 的周长为 $BC+AB+AC=4+4\sqrt{2}$，D 正确.故选 D.



8. CD　【解析】如图，当 $\angle x'O'y'=135°$ 时，其直观图是选项 C；当 $\angle x'O'y'=45°$ 时，其直观图是选项 D.故选 CD.

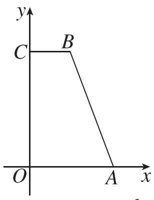


9. AC 【解析】在原平面图形$\triangle ABC$中,$AD\perp BC$,D为BC的中点,则AB与AC长度相等,故A正确;$AB=AC>AD$,故B错误,C正确;BC的长度与AD的长度的大小关系不确定,故D错误.故选AC.

10. ③ 【解析】对于①,矩形的直观图可以是平行四边形,不一定是矩形,故①错误;对于②,等腰三角形的直观图不一定是等腰三角形,故②错误;对于③,根据斜二测画法的规则得到直观图的平行关系不变,∴平行四边形的直观图一定是平行四边形,故③正确;对于④,菱形的直观图中,一组对边的长度可以改变,∴菱形的直观图不一定是菱形,故④错误.故填③.

11. 72 【解析】用斜二测画法画出的水平放置的正方形的直观图的面积为$18\sqrt{2}$,那么原正方形的面积为$18\sqrt{2}\times 2\sqrt{2}=72$.

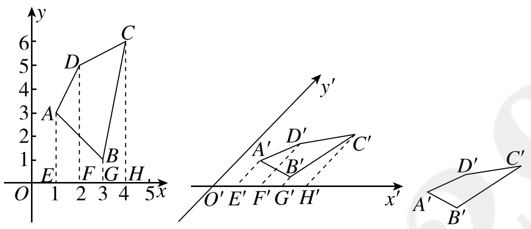
12. $4\sqrt{2}$ 【解析】由直观图可得该平面图形如图所示,在直角梯形$O'A'B'C'$中,$O'C'=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$,则该平面图形的高为$OC=2O'C'=4\sqrt{2}$.



13. 解:(1)由斜二测画法规则知$\angle ACB=90°$,故$\triangle ABC$为直角三角形.

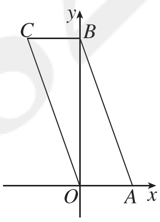
(2)由已知可得在$\triangle ABC$中,$AC=6$,$BC=8$,$\angle ACB=90°$,故$AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=10$.

14. 解:如图①所示,分别过点A,B,C,D作x轴的垂线,垂足分别为E,G,H,F,在图②中画出相应的x'轴和y'轴,使$\angle x'O'y'=45°$.在x'轴上截取$O'E'=OE$,作$A'E'\parallel y'$轴,截取$E'A'=\frac{1}{2}EA$,确定点A'.同理确定点B',C',D',其中$B'G'=\frac{1}{2}BG$,$C'H'=\frac{1}{2}CH$,$D'F'=\frac{1}{2}DF$.顺次连接A',B',C',D',去掉辅助线,得到四边形$ABCD$的直观图,如图③所示.



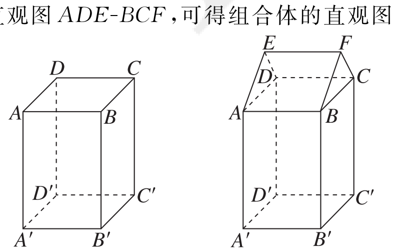
① ② ③

15. C 【解析】由直观图$O'A'B'C'$画出原平面图形$OABC$,如图所示.因为$O'B'=\sqrt{2}$,所以$OB=2\sqrt{2}$,$OA=1$,所以平面图形$OABC$以OA所在直线为轴旋转一周所得的几何体为一个圆锥和一个同底面的圆柱内部挖去一个同底等高的圆锥的组合体.故选C.



16. 解:画法:(1)先按照斜二测画法画出直四棱柱的直观图$A'B'C'D'$-$ABCD$,如图①;

(2)以直四棱柱的上底面$ABCD$为三棱柱的一个侧面画三棱柱的直观图ADE-BCF,可得组合体的直观图如图②.



① ②

8.3 简单几何体的表面积与体积

8.3.1 棱柱、棱锥、棱台的表面积和体积

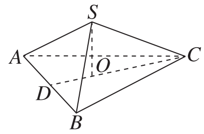
1. C 【解析】所求表面积为$6\times 3^2=54$.

2. D 【解析】$V=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times 1^2\times 3=\frac{\sqrt{3}}{4}$.

3. B 【解析】设该正四棱锥的侧面三角形底边上的高为h'.∵该正四棱锥的高为3 m,底面边长是8 m,∴根据勾股定理得$h'=\sqrt{3^2+\left(\frac{8}{2}\right)^2}=5$(m),∴该正四棱锥的侧面积为$4\times\frac{1}{2}\times 5\times 8=80$,即需要油毡的面积为80 m^2.故选B.

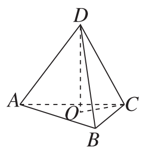
4. D 【解析】由题意可设棱柱的底面菱形的边长为a,因为底面是菱形,所以其对角线互相垂直,所以$a=\sqrt{\left(\frac{2\sqrt{14}}{2}\right)^2+\left(\frac{10\sqrt{2}}{2}\right)^2}=8$,所以棱柱的侧面积$S=4a\times 5=160$.

5. B 【解析】如图,在正三棱锥S-ABC中,取AB的中点D,连接CD,则S在平面ABC上的射影O在CD上,且O为$\triangle ABC$的中心.∵正三角形ABC的周长为9,∴$AB=3$,∴$CD=\frac{3\sqrt{3}}{2}$,∴$CO=\sqrt{3}$,又$SC=2$,∴正三棱锥S-ABC的高$SO=\sqrt{SC^2-CO^2}=1$,∴$V_{S\text{-}ABC}=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}\times SO=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 3\times\frac{3\sqrt{3}}{2}\times 1=\frac{3\sqrt{3}}{4}$.故选B.



6. A 【解析】因为$AB=3$,$BC=4$,$AA_1=5$,所以长方体的体积$V=3\times 4\times 5=60$,又$V_{A\text{-}A_1B_1D_1}=\frac{1}{3}S_{\triangle A_1B_1D_1}\cdot AA_1=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 3\times 4\times 5=10$,所以长方体截去一个三棱锥$A$-$A_1B_1D_1$后剩余几何体的体积为$60-10=50$.

7. C 【解析】依题意,这个六面体可视为由共底面的两个棱长为6 cm的正四面体拼接而成,如图,正四面体D-ABC的棱长为6 cm,O为正三角形ABC的中心,连接OC,OD,则正三角形ABC外接圆的半径$OC=\frac{2}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}AB=2\sqrt{3}$(cm),正四面体$D$-$ABC$的高$OD=\sqrt{CD^2-OC^2}=2\sqrt{6}$(cm),故$V_{D\text{-}ABC}=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}\cdot OD=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{4}AB^2\cdot OD=18\sqrt{2}$($cm^3$),所以一个香囊的容量为$36\sqrt{2}$ cm^3.故选C.



8. C 【解析】∵E是PC的中点,∴P,C到平面ABE的距离相等,∴$V_{三棱锥P\text{-}ABE}=V_{三棱锥C\text{-}ABE}$.又$D$是$PB$的中点,∴$D$到平面$ABE$的距离等于$P$到平面$ABE$的距离的$\frac{1}{2}$,∴$V_{三棱锥D\text{-}ABE}=\frac{1}{2}V_{三棱锥P\text{-}ABE}=\frac{1}{4}V_{三棱锥P\text{-}ABC}$,∴$\frac{V_1}{V_2}=\frac{V_{三棱锥D\text{-}ABE}}{V_{三棱锥P\text{-}ABC}}=\frac{1}{4}$.故选C.

9. BD 【解析】由题可知,用平行于棱锥底面的平面去截棱锥M,得到上、下两部分几何体M_1,M_2,易知M_1为棱锥,M_2为棱台,且M_1,M_2的高的比值为$\frac{1}{2}$,设棱锥M_1的高为h_1,侧面积为S_1,棱锥M的高为h_2,侧面积为S_2,则$\frac{h_1}{h_2}=\frac{1}{3}$,$\frac{S_1}{S_2}=\frac{1}{9}$,所以棱锥$M_1$和棱台$M_2$的侧面积之比为1∶8,易得棱锥$M_1$和棱锥$M$的底面积的比值为$\frac{1}{9}$,所以棱锥$M_1$和棱锥$M$的体积的比值为$\frac{1}{3}\times\frac{1}{9}=\frac{1}{27}$,故棱锥$M_1$和棱台$M_2$的体积之比为1∶26.故选BD.

10. $48\sqrt{3}+24$ 【解析】正六棱柱的底面是边长为4 cm的正六边形,侧面是6个长方形,其下底面的面积$S_{底}=6\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times 16=24\sqrt{3}$($cm^2$),侧面积$S_{侧}=4\times 1\times 6=24$($cm^2$),故正六棱柱的表面积$S=2S_{底}+S_{侧}=(48\sqrt{3}+24)cm^2$.

11. $32\sqrt{3}$ 【解析】设该正四棱台的高为h,侧面梯形的高为

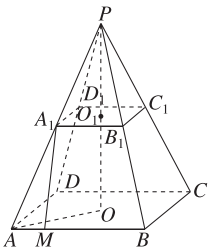
h'，由已知得$\frac{h}{3}(2^2+6^2+2\times6)=\frac{104\sqrt{2}}{3}$，所以$h=2\sqrt{2}$，则$h'=\sqrt{h^2+\left(\frac{6-2}{2}\right)^2}=\sqrt{(2\sqrt{2})^2+\left(\frac{6-2}{2}\right)^2}=2\sqrt{3}$，所以正四棱台的侧面积为$4\times\frac{(2+6)\times2\sqrt{3}}{2}=32\sqrt{3}$.

12. $\frac{3}{2}$ 【解析】在图②中，水面是中截面，水面以上的部分是一个小三棱柱，所以这个小三棱柱的底面积是原来大三棱柱底面积的$\frac{1}{4}$，从而这个小三棱柱的体积是原来大三棱柱体积的$\frac{1}{4}$(高一样)，所以水的体积是原来大三棱柱体积的$\frac{3}{4}$，则图①中水面的高度是三棱柱高的$\frac{3}{4}$，即为$\frac{3}{2}$.

13. **解**：(1)设此长方体共顶点的三条棱的长分别为a,b,c，则$ab=\sqrt{2}$，$bc=\sqrt{3}$，$ac=\sqrt{6}$，解得$c=\sqrt{3}$，$a=\sqrt{2}$，$b=1$，故这个长方体的体对角线长为$\sqrt{(\sqrt{2})^2+(\sqrt{3})^2+1^2}=\sqrt{6}$.

(2)由(1)可知这个长方体的体积$V=abc=\sqrt{6}$.

14. **解**：(1)过点P作$PO\perp$底面$ABCD$于点O，PO交平面$A_1B_1C_1D_1$于点O_1，如图，



由正四棱锥及棱台的性质可知，O为底面$ABCD$的中心，

则$O_1O=PO-PO_1=\frac{4\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\times PO_1-PO_1=PO_1=4$，

即棱台$A_1B_1C_1D_1\text{-}ABCD$的高$h=4$，

所以$V_{A_1B_1C_1D_1\text{-}ABCD}=\frac{1}{3}\times(S_{\text{正方形}ABCD}+S_{\text{正方形}A_1B_1C_1D_1}+\sqrt{S_{\text{正方形}ABCD}\cdot S_{\text{正方形}A_1B_1C_1D_1}})\times h=\frac{1}{3}\times[(4\sqrt{2})^2+(2\sqrt{2})^2+\sqrt{(4\sqrt{2})^2\times(2\sqrt{2})^2}]\times4=\frac{1}{3}\times56\times4=\frac{224}{3}$.

(2)如图，连接OA，则$OA=\frac{\sqrt{2}}{2}AB=\frac{\sqrt{2}}{2}\times4\sqrt{2}=4$，

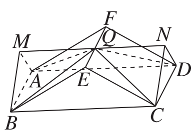
则$AA_1=\frac{1}{2}AP=\frac{1}{2}\times\sqrt{8^2+4^2}=2\sqrt{5}$.

作$A_1M\perp AB$于点M，

则$A_1M=\sqrt{(2\sqrt{5})^2-\left(\frac{4\sqrt{2}-2\sqrt{2}}{2}\right)^2}=3\sqrt{2}$，

故棱台$A_1B_1C_1D_1\text{-}ABCD$的表面积$S_{\text{表}}=S_{\text{正方形}ABCD}+S_{\text{正方形}A_1B_1C_1D_1}+4S_{\text{梯形}A_1ABB_1}=(4\sqrt{2})^2+(2\sqrt{2})^2+4\times\frac{1}{2}\times(2\sqrt{2}+4\sqrt{2})\times3\sqrt{2}=32+8+72=112$.

15. C 【解析】如图所示，几何体为直三棱柱$BCE\text{-}ADF$和两个三棱锥$Q\text{-}MAB$，$Q\text{-}NCD$构成的组合体，设直三棱柱$BCE\text{-}ADF$的高为h，底面BCE的面积为S.因为$BE=CE=4$，$\angle BEC=120°$，



所以$S=\frac{1}{2}BE\cdot CE\sin120°=\frac{1}{2}\times4\times4\times\frac{\sqrt{3}}{2}=4\sqrt{3}$，且$h=CD=BC=\sqrt{4^2+4^2-2\times4\times4\cos120°}=4\sqrt{3}$，所以该几何体的体积$V=V_{BCE\text{-}ADF}+V_{Q\text{-}MAB}+V_{Q\text{-}NCD}=Sh+\frac{1}{3}S\cdot\frac{1}{2}h+\frac{1}{3}S\cdot\frac{1}{2}h=\frac{4}{3}Sh=\frac{4}{3}\times4\sqrt{3}\times4\sqrt{3}=64$.故选C.

16. **解**：(1)$V_{\text{四面体}}=\frac{1}{3}V_{\text{生成平行六面体}}$.

(2)构造该四面体的"生成长方体"(图略)，设长方体共顶点的三条棱的长分别为x,y,z，则有$\begin{cases}x^2+y^2=5,\\x^2+z^2=10,\\z^2+y^2=13,\end{cases}$可得$\begin{cases}x=1,\\y=2,\\z=3,\end{cases}$故此四面体的体积$V=3\times2\times1-4\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times1\times2\times3=2$.

8.3.2 圆柱、圆锥、圆台、球的表面积和体积

第1课时 圆柱、圆锥、圆台的表面积和体积

1. A 【解析】圆锥的体积$V=\frac{1}{3}\pi\times2^2\times3=4\pi$.

2. B 【解析】设圆柱的母线长为l，底面半径为r，则由题意得$\begin{cases}l=2r,\\2\pi rl=4\pi,\end{cases}$解得$\begin{cases}r=1,\\l=2,\end{cases}$$\therefore V_{\text{圆柱}}=\pi r^2l=2\pi$.

3. B 【解析】圆台上、下底面的面积分别为36π和49π，则圆台上、下底面的半径分别为6和7，又圆台的母线长为5，所以圆台的轴截面是上底边长为12，下底边长为14，腰长为5的等腰梯形，其高为$\sqrt{5^2-(7-6)^2}=2\sqrt{6}$，则该等腰梯形的面积为$\frac{1}{2}\times(12+14)\times2\sqrt{6}=26\sqrt{6}$.故选B.

4. B 【解析】由题意可知几何体的表面积为$4\times(2+2+2+2)+2\times2\times2+4\pi+\frac{1}{2}\times4\pi\times4=40+12\pi$.故选B.

5. B 【解析】将一个腰长为2的直角三角形绕着它的一条直角边所在的直线旋转$\frac{\pi}{4}$，所得几何体为一个圆锥的$\frac{1}{8}$.由题意得圆锥的底面半径为2，高为2，所以形成的几何体的体积为$\frac{1}{8}\times\frac{1}{3}\times\pi\times2^2\times2=\frac{\pi}{3}$.故选B.

6. A 【解析】设圆柱的底面圆半径为r，高为h，则圆柱的表面积为$2\pi r^2+2\pi rh$，新几何体的表面积为$2\pi r^2+2\pi rh+2rh$，故$2rh=10$，故圆柱的侧面积为$2\pi rh=10\pi$.故选A.

7. C 【解析】设圆柱的底面半径为r，由题意结合正弦定理得$2r=\frac{2}{\sin60°}$，解得$r=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，故圆柱的高$h=\sqrt{2^2-\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\sqrt{4-\frac{4}{3}}=\frac{2\sqrt{6}}{3}$，所以圆柱的体积$V=\pi r^2h=\pi\times\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2\times\frac{2\sqrt{6}}{3}=\frac{8\sqrt{6}\pi}{9}$.故选C.

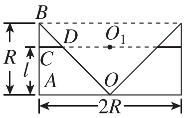
8. A 【解析】设$AB=a$，$CD=b$，$AD=c$，$BC=d$，且$a>b$，则$S_1=\pi c^2+2\pi cb+\pi cd$，$V_1=\pi c^2b+\frac{1}{3}\pi c^2(a-b)$，$S_2=\pi c^2+2\pi ca+\pi cd$，$V_2=\pi c^2a-\frac{1}{3}\pi c^2(a-b)$，所以$S_2-S_1=2\pi c(a-b)>0$，$V_2-V_1=\pi c^2(a-b)-\frac{2}{3}\pi c^2(a-b)=\frac{1}{3}\pi c^2(a-b)>0$，即$S_1<S_2$，$V_1<V_2$，故选A.

9. BD 【解析】设圆锥的母线长为l，$\because$圆锥的底面半径为2，其侧面展开图为一个半圆，$\therefore\pi l=2\pi\times2$，解得$l=4$，$\therefore$圆锥的高为$\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3}$，故A错误，B正确；圆锥的表面积$S=\frac{\pi\times4^2}{2}+\pi\times2^2=12\pi$，故C错误；圆锥的体积$V=\frac{1}{3}\times\pi\times2^2\times2\sqrt{3}=\frac{8\sqrt{3}}{3}\pi$，故D正确.故选BD.

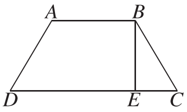
10. 15π 【解析】圆锥的底面积为9π，则底面半径为3，又圆锥的高为4，则圆锥的母线长为5，所以该圆锥的侧面积为$3\times5\times\pi=15\pi$.

11. 47 【解析】由题意知水深为$35\times\frac{2}{7}=10$(cm)，水面直径为$24+2\times\frac{38-24}{2}\times\frac{2}{7}=28$(cm)，根据圆台的体积公式得降雨的体积$V=\frac{1}{3}\times(\pi\times12^2+\pi\times14^2+\sqrt{\pi\times12^2\times\pi\times14^2})\times10=\frac{5080}{3}\pi(\text{cm}^3)$，则降水量为$\frac{V}{\pi\times19^2}\approx\frac{5080}{3\times361}\approx4.7(\text{cm})=47(\text{mm})$.

12. $\pi(R^2-l^2)$ 【解析】题图中的几何体的轴截面如图所示，因为 $OA=AB=R$，$OA\perp AB$，所以$\triangle AOB$ 是等腰直角三角形. 又 $CD/\!/OA$，则 $CD=BC$. 设 O_1 为截面圆的圆心，$O_1D=x$，则 $CD=R-x$. 又 $BC=R-l$，故 $x=l$，所以所求截面面积 $S=\pi R^2-\pi l^2=\pi(R^2-l^2)$.



13. 解：圆台的轴截面如图所示.

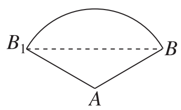


设圆台上底面半径为 r，则下底面半径为 $2r$，又由已知可得$\angle EBC=30°$，$\therefore EC=r$，$BC=2r$，$\because$圆台的母线长为 $2a$，$\therefore r=a$，故圆台两底面的半径分别为 a 和 $2a$，两底面面积之和为 $\pi a^2+\pi\cdot(2a)^2=5a^2\pi$.

14. 解：(1) 因为 $AC\perp BC$，$BC=2$，$\tan\angle ABC=2\sqrt{2}$，即 $\tan\angle ABC=\dfrac{AC}{BC}=2\sqrt{2}$，所以 $AC=4\sqrt{2}$，所以以 AC 所在直线为旋转轴，将直角三角形 ABC 旋转一周所得的几何体是以 $BC=2$ 为底面半径，$AC=4\sqrt{2}$为高的圆锥，

又 $AB=\sqrt{2^2+(4\sqrt{2})^2}=6$，所以该几何体的表面积 $S=\pi\times 2^2+\pi\times2\times6=16\pi$.

(2)将圆锥的侧面沿母线 AB 展开，如图.



连接 BB_1，则蚂蚁爬行的最短距离就是 BB_1 的长度，

由题得$\angle BAB_1=\dfrac{2\pi\times2}{6}=\dfrac{2\pi}{3}$，在$\triangle ABB_1$中，由余弦定理得 $BB_1=\sqrt{6^2+6^2-2\times6\times6\times\cos\dfrac{2\pi}{3}}=6\sqrt{3}$，所以蚂蚁爬行的最短距离为 $6\sqrt{3}$.

15. $\dfrac{8}{27}$ 【解析】细沙全部在上部时，沙漏上部分圆锥中的细沙的高为$\dfrac{2}{3}h$，设圆锥的底面半径为 r，则细沙形成的圆锥的底面半径为$\dfrac{2}{3}r$，$\therefore$ 细沙的体积 $V=\dfrac{1}{3}\pi\cdot\left(\dfrac{2}{3}r\right)^2\cdot\dfrac{2}{3}h=\dfrac{8}{81}\pi r^2h$. 细沙漏入下部后，圆锥形沙堆的底面半径为 r，设高为 h'，则 $V=\dfrac{1}{3}\pi r^2\cdot h'=\dfrac{8}{81}\pi r^2h$，得 $h'=\dfrac{8}{27}h$，$\therefore\dfrac{h'}{h}=\dfrac{8}{27}$.

16. 解：(1)设圆锥的母线长、底面半径分别为 $l(l>0)$，$r(r>0)$，由圆锥的轴截面为等腰三角形且顶角为 90°，得 $l^2+l^2=(2r)^2$，可得 $l=\sqrt{2}r$.

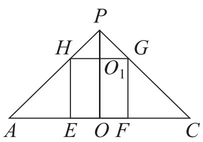
因为 $\cos\angle APB=\dfrac{1}{4}$，所以 $\sin\angle APB=\sqrt{1-\cos^2\angle APB}=\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{4}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$.

因为$\triangle PAB$ 的面积为 $2\sqrt{15}$，所以 $S_{\triangle PAB}=\dfrac{1}{2}PA\cdot PB\cdot\sin\angle APB=\dfrac{1}{2}l^2\times\dfrac{\sqrt{15}}{4}=2\sqrt{15}$，可得 $l=4$，

又 $l=\sqrt{2}r$，所以 $r=2\sqrt{2}$，

所以圆锥的侧面积 $S=\dfrac{1}{2}\times2\pi r\times l=\pi\times2\sqrt{2}\times4=8\sqrt{2}\pi$.

(2)由(1)知圆锥的高 $h_0=r=\dfrac{\sqrt{2}}{2}l=2\sqrt{2}$，作出轴截面，如图.



作 $PO\perp AC$，垂足为 O，交 HG 于 O_1.

设正四棱柱的底面边长为 a，高为 h，

则 $HG=\sqrt{2}a$，$PO_1=h_0-h$，

由$\dfrac{PO_1}{PO}=\dfrac{HG}{AC}$得$\dfrac{2\sqrt{2}-h}{2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}a}{4\sqrt{2}}$，所以 $a=\sqrt{2}(2\sqrt{2}-h)$，

所以正四棱柱的侧面积 $S_{侧}=4ah=4\sqrt{2}(2\sqrt{2}-h)h\leqslant 4\sqrt{2}\left[\dfrac{(2\sqrt{2}-h)+h}{2}\right]^2=8\sqrt{2}$，当且仅当 $2\sqrt{2}-h=h$，即 $h=\sqrt{2}$时等号成立，所以该圆锥的内接正四棱柱的侧面积的最大值为 $8\sqrt{2}$.

第 2 课时 球的表面积和体积

1. D 【解析】因为球的半径 $R=3$，所以该球的体积 $V=\dfrac{4}{3}\pi R^3=36\pi$. 故选 D.

2. C 【解析】若球的最大截面圆面积扩大为原来的 2 倍，则球的半径扩大为原来的$\sqrt{2}$倍，则球的体积扩大为原来的 $2\sqrt{2}$倍. 故选 C.

3. B 【解析】由题知球和圆柱的体积相等，则$\dfrac{4}{3}\pi R^3=\pi R^2h$，可得$\dfrac{h}{R}=\dfrac{4}{3}$. 故选 B.

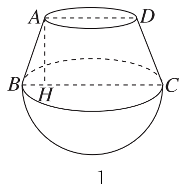
4. C 【解析】设这个球的半径是 R cm，由题意可得 $R^2=10^2+(R-5)^2$，解得 $R=12.5$，所以这个球的半径是 12.5 cm. 故选 C.

5. B 【解析】由题意得该中药胶囊由两个半球和一个圆柱组成，所以其体积为一个球的体积和一个圆柱的体积之和. 球的体积 $V_1=\dfrac{4}{3}\pi R^3=\dfrac{4}{3}\pi\times3^3=36\pi(\mathrm{mm}^3)$，圆柱的体积 $V_2=\pi R^2\cdot h=\pi\times3^2\times8=72\pi(\mathrm{mm}^3)$，所以该中药胶囊的体积 $V=V_1+V_2=36\pi+72\pi=108\pi(\mathrm{mm}^3)$. 故选 B.

6. A 【解析】由题意可得，球心到截面圆所在平面的距离 $d=\dfrac{4\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$，设截面圆的半径为 r，球的半径为 R，则 $2\pi r=4\pi$，解得 $r=2$，所以 $R=\sqrt{r^2+d^2}=4$，所以该球的表面积为 $4\pi R^2=64\pi$. 故选 A.

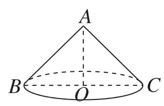
7. B 【解析】该灯笼去掉圆柱部分的高为 $40-8=32$(cm)，则 $R-h=\dfrac{32}{2}=16$(cm). 又圆柱的底面圆直径为 24 cm，所以 $(R-h)^2+12^2=R^2$，即 $16^2+12^2=R^2$，可得 $R=20$ cm，则 $h=4$ cm，故该灯笼的体积 $V=2V_{圆柱}+V_{球}-2V_{球缺}=2\times4\times12^2\times\pi+\dfrac{4}{3}\times\pi\times20^3-2\times\dfrac{\pi}{3}(60-4)\times4^2\approx3456+32\,000-1792=33\,664(\mathrm{cm}^3)$. 故选 B.

8. D 【解析】如图，圆台的轴截面为等腰梯形 $ABCD$，过点 A 作 $AH\perp BC$，垂足为 H. 由题意得 $AB=\sqrt{10}$ cm，$AD=4$ cm，$BC=6$ cm，所以 $BH=\dfrac{1}{2}(BC-AD)=1$(cm)，



$AH=\sqrt{AB^2-BH^2}=3$(cm)，故圆台的体积 $V_1=\dfrac{1}{3}\times3\times(2^2\times\pi+\sqrt{2^2\times\pi\times3^2\times\pi}+3^2\times\pi)=19\pi(\mathrm{cm}^3)$，半球的体积 $V_2=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{4\pi}{3}\times3^3=18\pi(\mathrm{cm}^3)$，又半球的密度为圆台密度的 3 倍，所以半球的质量为$\dfrac{V_2}{V_1}\times190\times3=\dfrac{18}{19}\times190\times3=540$(g)，故该不倒翁的总质量为 $190+540=730$(g). 故选 D.

9. ABD 【解析】设球的半径为 R. 对于 A，如图所示，$OB=OA=OC=R$，所以$\angle BAC=\dfrac{\pi}{2}$，故 A 正确；对于 B，圆锥的表面积 $S_1=\pi R^2+\pi\cdot R\cdot\sqrt{2}R=\pi R^2+\sqrt{2}\pi R^2$，球的表面积 $S_2=4\pi R^2$，所以 $S_1>\dfrac{1}{2}S_2$，故 B 正确；对于 C，圆锥的母线长为$\sqrt{2}R$，底面周长为 $2\pi R$，所以圆锥侧面展开图的圆心角的弧度数为$\dfrac{2\pi R}{\sqrt{2}R}=\sqrt{2}\pi$，故 C 错误；对于 D，圆锥的体积 $V_1=\dfrac{1}{3}\cdot\pi R^2\cdot R=\dfrac{1}{3}\pi R^3$，球的体积 $V_2=\dfrac{4}{3}\pi R^3$，故$\dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{1}{4}$，故 D 正确. 故选 ABD.

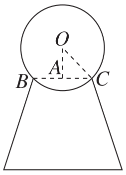


10. 36π 【解析】设球的半径为 R，则$\dfrac{4\pi R^3}{3}=36\pi$，$\therefore R=3$，故球的表面积是 $4\pi R^2=36\pi$.

11. $\sqrt{17}$ 【解析】设圆锥的高为 h cm，依题意得$\dfrac{1}{3}\pi\times1^2\times$

$h=\frac{4}{3}\pi\times1^3$，解得 $h=4$，所以圆锥的母线长为 $\sqrt{1^2+4^2}=\sqrt{17}$(cm).

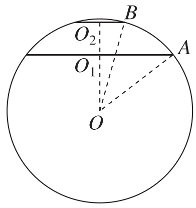
12. $4+\sqrt{2}$ 【解析】如图所示，设截面圆的圆心为 O，作 $OA\perp BC$，垂足为 A. 设水晶球的半径为 r，则 $4\pi r^2=8\pi$，可得 $r=\sqrt{2}$. 设圆台的高为 h，则 $7\pi=\frac{h}{3}(\pi\cdot1^2+\pi\cdot2^2+\pi\cdot\sqrt{1^2\times2^2})$，解得 $h=3$. 又因为水晶球球心到圆台上底面的距离为 $OA=\sqrt{(\sqrt{2})^2-1^2}=1$，所以该奖杯的高为 $h+r+1=4+\sqrt{2}$.



13. **解**：设球的半径为 r，依题意得 $3\times\frac{4\pi}{3}r^3+\pi r^2\times8=\pi r^2\times6r$，解得 $r=4$，所以一个球的表面积 $S=4\pi r^2=64\pi(\mathrm{cm}^2)$.

14. **解**：设球的半径为 R.

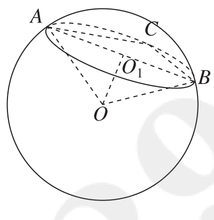
①当截面在球心的同侧时，画出轴截面并作出辅助线如图，由球的截面性质知，$AO_1/\!/BO_2$，且 O_1，O_2 分别为两截面圆的圆心，则 $OO_1\perp AO_1$，$OO_2\perp BO_2$.



$\because\pi\cdot O_2B^2=49\pi$，$\therefore O_2B=7$.
$\because\pi\cdot O_1A^2=400\pi$，$\therefore O_1A=20$.
设 $OO_1=x$，则 $OO_2=x+9$.
在 $\mathrm{Rt}\triangle OO_1A$ 中，$R^2=x^2+20^2$，
在 $\mathrm{Rt}\triangle OO_2B$ 中，$R^2=(x+9)^2+7^2$，$\therefore x^2+20^2=7^2+(x+9)^2$，解得 $x=15$，$\therefore R^2=x^2+20^2=25^2$，
$\therefore R=25$，$\therefore V_{球}=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{62\ 500}{3}\pi$.

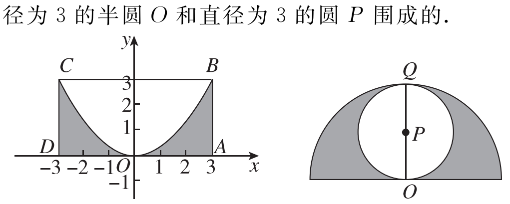
②当截面在球心异侧时，$\sqrt{R^2-7^2}+\sqrt{R^2-20^2}=9$，无解.
综上，球的体积为 $\frac{62\ 500}{3}\pi$.

15. $\frac{\pi}{3}R$　$\frac{\sqrt{3}}{2}R$ 【解析】如图所示，连接 OA，OB. 因为 $AC\perp BC$，所以 AB 是 $\triangle ABC$ 外接圆的直径. 因为 $AB=OA=OB=R$，所以 $\triangle OAB$ 是等边三角形，所以 $\angle AOB=\frac{\pi}{3}$，故 A，B 两点的球面距离为 $\frac{\pi}{3}R$. 设 AB 的中点为 O_1，连接 OO_1，则 OO_1 为球心 O 到平面 ABC 的距离. 又 $\angle O_1OA=\frac{\pi}{6}$，所以球心 O 到平面 ABC 的距离为 $O_1O=R\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}R$.



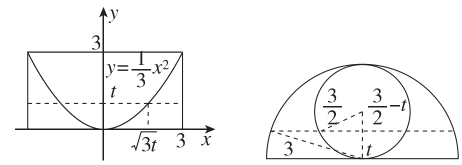
16. **解**：(1)剩余部分的体积 $V_1=\frac{1}{2}\times\frac{4\pi}{3}\times3^3-\frac{4\pi}{3}\times\left(\frac{3}{2}\right)^3=\frac{27\pi}{2}$.

(2)图①中阴影部分是由长方形 $ABCD$(长为 6，宽为 3)的三边和曲线 $y=\frac{1}{3}x^2(-3\leqslant x\leqslant3)$ 围成的，图②中阴影部分是由半径为 3 的半圆 O 和直径为 3 的圆 P 围成的.



①　　②

将图①中阴影部分绕 y 轴旋转一周可得一圆柱挖去中间的部分的几何体，记为 M，将图②中阴影部分绕小圆的直径 OQ 旋转一周可得一个半球挖去一个小球的几何体，记为 N，将两个几何体放在同一水平面上，用与圆柱下底面或与半球大圆所在平面距离为 $t(0<t<3)$ 的平面截两个几何体，可得截面都为圆环，两几何体的纵截面图如图所示.



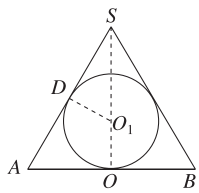
几何体 M 的截面面积为 $\pi\times3^2-\pi\times(\sqrt{3t})^2=9\pi-3t\pi$，
几何体 N 的截面面积为 $\pi\times(\sqrt{9-t^2})^2-\pi\left(\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}-t\right)^2}\right)^2=9\pi-3t\pi$，又两几何体等高，
所以由祖暅原理可得两几何体的体积相等，结合(1)可知几何体 M 的体积 $V_M=V_N=V_1=\frac{27\pi}{2}$，
由曲线 $y=\frac{1}{3}x^2(-3\leqslant x\leqslant3)$ 与线段 $y=3(-3\leqslant x\leqslant3)$ 围成的图形绕 y 轴旋转得到的旋转体即为一个圆柱(底面半径为 3，高为 3)去掉几何体 M，
所以所求体积 $V_2=\pi\times3^2\times3-V_M=27\pi-\frac{27\pi}{2}=\frac{27\pi}{2}$.

微特训　空间几何体与球外接、内切问题

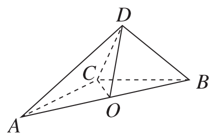
1. A 【解析】由已知得长方体的体对角线长为 $l=\sqrt{2^2+2^2+4^2}=2\sqrt{6}$，所以外接球的半径 $R=\frac{l}{2}=\sqrt{6}$，故外接球的表面积 $S=4\pi R^2=24\pi$，故选 A.

2. B 【解析】依题意可得该圆柱的底面半径为 1，高为 2，易得该圆柱的内切球的半径为 1，则该圆柱的内切球的体积为 $\frac{4}{3}\pi\times1^3=\frac{4}{3}\pi$. 故选 B.

3. C 【解析】圆锥与其内切球的轴截面如图所示，其中 O_1 为内切球球心，D，O 分别为内切球与侧面、底面的交点，由已知得 $O_1D=1$，$SO_1=2$，可知 $\angle O_1SD=30°$，所以圆锥的轴截面为正三角形. 因为 $SO=3$，所以圆锥底面圆的半径 $AO=SO\cdot\tan30°=\sqrt{3}$，母线 $SA=\frac{AO}{\cos60°}=2\sqrt{3}$，则圆锥的表面积为 $\pi\times(\sqrt{3})^2+\pi\times\sqrt{3}\times2\sqrt{3}=9\pi$. 故选 C.



4. B 【解析】如图，设 O 是 AB 的中点，连接 OC，OD，因为 $\angle ACB=\angle ADB=90°$，所以 $OA=OB=OC=OD$，所以 O 是四面体 $ABCD$ 外接球的球心，故外接球的半径为 $OA=OB=OC=OD=\frac{1}{2}AB=1$，所以外接球的表面积为 $4\pi\times1^2=4\pi$. 故选 B.



5. D 【解析】由题意知正三角形 ABC 的边长为 6，其内切圆的半径 $r=\sqrt{3}<2$，所以正三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 内的球的半径的最大值为 $\sqrt{3}$，则 V 的最大值为 $\frac{4}{3}\pi r^3=4\sqrt{3}\pi$，故选 D.

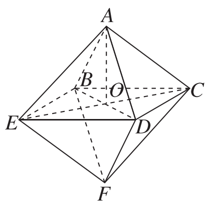
6. B 【解析】设球 O 的半径为 R，$\because$ 球 O 的体积为 $\frac{20\sqrt{5}}{3}\pi$，$\therefore\frac{4\pi R^3}{3}=\frac{20\sqrt{5}}{3}\pi$，解得 $R=\sqrt{5}$. $\because AB=AC=1$，$BC=\sqrt{3}$，
$\therefore\cos\angle CAB=\frac{AC^2+AB^2-BC^2}{2AC\cdot AB}=\frac{1^2+1^2-(\sqrt{3})^2}{2\times1\times1}=-\frac{1}{2}$，
$\therefore\angle CAB=\frac{2\pi}{3}$，$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times1^2\times\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{4}$，$\triangle ABC$ 外接圆的半径 r 满足 $2r=\frac{BC}{\sin\angle CAB}=\frac{\sqrt{3}}{\sin\frac{2\pi}{3}}=2$，解得 $r=1$. 设球心 O 到底面的距离为 h，则 $h=\sqrt{R^2-r^2}=2$，$\therefore$ 这个直三棱柱的体积 $V=2h\cdot S_{\triangle ABC}=2\times2\times\frac{\sqrt{3}}{4}=\sqrt{3}$. 故选 B.

7. AD 【解析】由截面图可以看出，圆柱的底面直径是球形巧

克力直径的 3 倍，所以 $R=3r$. 圆柱的高等于球形巧克力的直径，即 $h=2r$，则 $V_1=\frac{4\pi r^3}{3}$，$V_2=\pi R^2h=\pi\cdot(3r)^2\cdot 2r=18\pi r^3$，所以 $2V_2=27V_1$. 故选 AD.

8. BCD 【解析】因为该正方体的棱长为 $\sqrt{5}$，所以其体积为 $(\sqrt{5})^3=5\sqrt{5}$，表面积为 $6\times(\sqrt{5})^2=30$，A 错误，C 正确. 该正方体的内切球的直径为 $\sqrt{5}$，所以内切球的体积为 $\frac{4}{3}\pi\times\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^3=\frac{5\sqrt{5}}{6}\pi$，B 正确. 该正方体的外接球的直径为正方体的体对角线长，即为 $\sqrt{3}\times\sqrt{5}=\sqrt{15}$，所以外接球的表面积为 $4\pi\times\left(\frac{\sqrt{15}}{2}\right)^2=15\pi$，D 正确. 故选 BCD.

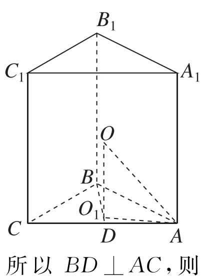
9. ABC 【解析】由题可知，该多面体是棱长均为 2 的正八面体，如图所示，其中四棱锥 A-$BCDE$ 和四棱锥 F-$BCDE$ 均为正四棱锥，连接 BD，CE，交于点 O，连接 AO，则 AO 为正四棱锥 A-$BCDE$ 的高，易知 $BD=CE=2\sqrt{2}$，$AO=\sqrt{AB^2-OB^2}=\sqrt{2}$，∴该多面体的体积 $V=2V_{四棱锥A\text{-}BCDE}=2\times\frac{1}{3}\times S_{四边形BCDE}\times AO=2\times\frac{1}{3}\times 2\times 2\times\sqrt{2}=\frac{8}{3}\sqrt{2}$，该多面体的表面积 $S=8S_{\triangle ABC}=8\times\frac{1}{2}\times 2\times 2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=8\sqrt{3}$，故 A 正确，D 错误. 由题易知，该多面体的外接球的半径为 $\sqrt{2}$，内切球的半径为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$，故该多面体的外接球的表面积为 8π，内切球的体积为 $\frac{8\sqrt{6}\pi}{27}$，故 B，C 正确，故选 ABC.



10. 61π 【解析】设圆台的上底面半径为 r，下底面半径为 R，则 $R=5$，$r=4$. 由题意可知，圆台的下底面为球的大圆，所以圆台的高 $h=\sqrt{R^2-r^2}=3$，所以其体积 $V=\frac{1}{3}\pi h(R^2+r^2+Rr)=\frac{1}{3}\pi\times 3\times(5^2+4^2+5\times 4)=61\pi$.

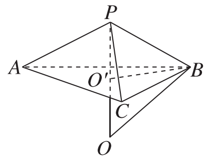
11. 17π 【解析】四棱锥 D_1-$ABCD$ 的外接球即为长方体 $ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$ 的外接球，因为 $AB=BC=2$，$AA_1=3$，所以长方体 $ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$ 的体对角线长为 $\sqrt{2^2+2^2+3^2}=\sqrt{17}$，则长方体 $ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$ 的外接球的半径 $R=\frac{\sqrt{17}}{2}$，所以“阳马”D_1-$ABCD$ 的外接球的表面积 $S=4\pi R^2=4\pi\times\left(\frac{\sqrt{17}}{2}\right)^2=17\pi$.

12. $\frac{161}{5}\pi$ 【解析】设 $\triangle ABC$ 的外接圆圆心为 O_1，半径为 r，直三棱柱 ABC-$A_1B_1C_1$ 的外接球的球心为 O，半径为 R. 取 AC 的中点 D，连接 BD，OO_1，O_1A，OA，可知 $O_1\in BD$，$O_1A=r$，$OA=R$，$OO_1=\frac{1}{2}AA_1=2$ 且 $OO_1\mathbin{/\mkern-6mu/}AA_1$. 因为 $AB=BC$，D 为 AC 的中点，所以 $BD\perp AC$，则 $BD=\sqrt{AB^2-AD^2}=\sqrt{5}$，$\sin\angle BAC=\frac{BD}{AB}=\frac{\sqrt{5}}{3}$，可得 $r=\frac{BC}{2\sin\angle BAC}=\frac{9\sqrt{5}}{10}$，故 $R^2=r^2+OO_1^2=\frac{161}{20}$，所以直三棱柱 ABC-$A_1B_1C_1$ 的外接球的表面积 $S=4\pi R^2=\frac{161}{5}\pi$.



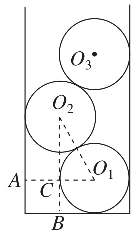
13. 解：由题可知 $PA=PB=PC$，又 PA，PB，PC 两两垂直，
∴此正三棱锥的外接球即为以 PA，PB，PC 为三条棱的正方体的外接球 O.
∵球 O 的半径为 $\sqrt{3}$，∴正方体的棱长为 2，即 $PA=PB=PC=2$，球心 O 到截面 ABC 的距离即为正方体的中心到截面 ABC 的距离.
设 P 到截面 ABC 的距离为 h，则正三棱锥 P-ABC 的体积 $V=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}\times h=\frac{1}{3}S_{\triangle PAB}\times PC=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 2\times 2\times 2=\frac{4}{3}$，又 $\triangle ABC$ 是边长为 $2\sqrt{2}$ 的正三角形，
∴$S_{\triangle ABC}=\frac{\sqrt{3}}{4}\times(2\sqrt{2})^2=2\sqrt{3}$，∴$h=\frac{4}{S_{\triangle ABC}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，
∴球心 O 到截面 ABC 的距离为 $\sqrt{3}-\frac{2\sqrt{3}}{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

14. 解：如图，设底面 $\triangle ABC$ 的中心为 O'，连接 PO'，BO'，则球心 O 在直线 PO' 上.
在正三角形 ABC 中，易知 $BO'=\frac{\sqrt{3}}{3}\times 3=\sqrt{3}$.

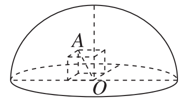


在 Rt$\triangle PO'B$ 中，因为 $PB=2$，$BO'=\sqrt{3}$，所以由勾股定理可得 $PO'=\sqrt{2^2-(\sqrt{3})^2}=1$，则 O 在 PO' 的延长线上，连接 OB. 设球的半径为 R，则 $OP=OB=R$，$OO'=R-1$.
在 Rt$\triangle OO'B$ 中，由勾股定理可得 $O'B^2+OO'^2=OB^2$，即 $(\sqrt{3})^2+(R-1)^2=R^2$，解得 $R=2$，
所以该球的表面积 $S=4\pi R^2=16\pi$.

15. B 【解析】如图，作出轴截面. 将第一个球 O_1 靠近该圆柱右侧放置，球 O_1 上的点到该圆柱底面的最大距离为 2，将第二个球 O_2 靠近圆柱左侧放置，O_1 与 O_2 相切，过点 O_1 作 O_1A 垂直于该圆柱的母线，垂足为 A，过点 O_2 作 O_2B 垂直于圆柱底面，垂足为 B，设 $O_1A\cap O_2B=C$，则 $AC=BC=1$，$CO_1=1$，$CO_2=\sqrt{O_1O_2^2-CO_1^2}=\sqrt{3}$，则球 O_2 上的点到该圆柱底面的最大距离为 $2+\sqrt{3}$，将第三个球 O_3 靠近该圆柱右侧放置，O_2 与 O_3 相切，同理可得球 O_3 上的点到该圆柱底面的最大距离为 $2+2\sqrt{3}$，由此规律可得，每多放一个球，最上面的球上的点到该圆柱底面的最大距离增加 $\sqrt{3}$. 因为 $10\sqrt{3}+2<20<11\sqrt{3}+2$，所以最多能装下小球的个数为 11. 故选 B.



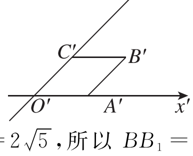
16. 解：要使半球形容器内壁的半径最小，只需保证四个小球球心构成正方形，相邻的两个小球相切，且四个小球与半球形的容器内壁都相切. 如图所示，



O 为半球的球心，A 为其中一个小球的球心，连接 OA，则 OA 是棱长为 2 的正方体的体对角线，且该小球与半球形容器内壁的切点与 O，A 共线，所以半球形容器内壁的半径的最小值为小球半径与 OA 长度之和，即 $2\sqrt{3}+2$.

滚动习题（五）

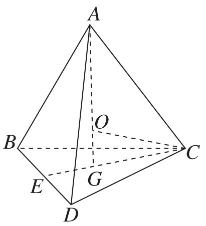
1. B 【解析】由球的表面积公式得 $S_表=4\pi\times 2^2=16\pi$. 故选 B.
2. D 【解析】圆锥的轴截面是两腰等于母线长的等腰三角形，A 错误；只有用一个平行于底面的平面去截棱锥，才能得到一个棱锥和一个棱台，B 错误；将一个等腰梯形绕着它较长的底边所在的直线旋转一周，所得几何体是由一个圆柱和两个圆锥组合而成的，C 错误；由棱柱的定义得，有两个面平行，其余各面都是四边形，并且每相邻两个四边形的公共边都互相平行的几何体叫棱柱，D 正确. 故选 D.
3. B 【解析】根据题意，画出直观图. 如图所示. 易得四边形 $O'A'B'C'$ 是边长为 2 的菱形，且 $\angle C'O'A'=45°$，故四边形 $O'A'B'C'$ 的周长为 8. 故选 B.



4. C 【解析】连接 B_1E_1，因为该正六棱柱的底面边长为 2，所以 $B_1E_1=4$，又 $BE_1=2\sqrt{5}$，所以 $BB_1=\sqrt{(2\sqrt{5})^2-4^2}=2$，故该正六棱柱的表面积为 $2\times 6\times\frac{1}{2}\times 2\times 2\times\sin\frac{\pi}{3}+6\times 2\times 2=12\sqrt{3}+24$. 故选 C.

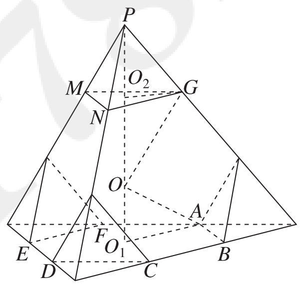
5. B 【解析】设圆锥的底面半径为 r,母线长为 $2l$,则圆锥的侧面积 $S=\frac{1}{2}\times 2\pi r\times 2l=2\pi rl$,截得的小圆锥的底面半径为 $\frac{r}{2}$,母线长为 l,其侧面积 $S_1=\frac{1}{2}\times\pi r\times l=\frac{1}{2}\pi rl$,而圆台的侧面积 $S_2=S-S_1=2\pi rl-\frac{1}{2}\pi rl=\frac{3}{2}\pi rl$,所以 $\frac{S_1}{S_2}=\frac{\frac{1}{2}\pi rl}{\frac{3}{2}\pi rl}=\frac{1}{3}$.故选 B.

6. D 【解析】由正四面体的对称性与球的对称性可知球心在正四面体的高上.设外接球的半径为 R,O 为外接球球心,G 为△BCD 的中心,设 E 为 BD 的中点,连接 CE,则 G 在 CE 上,且 $CG=2EG$.连接 AG,则 $AG\perp$ 平面 BCD,O 在 AG 上,连接 OC.易知 $CE=\frac{\sqrt{3}}{2}$,$CG=\frac{2}{3}CE=\frac{\sqrt{3}}{3}$,∴$AG=\sqrt{AC^2-CG^2}=\frac{\sqrt{6}}{3}$,∴$OG=\frac{\sqrt{6}}{3}-R$.在 Rt△$OCG$ 中,$OC^2=OG^2+CG^2$,即 $R^2=\left(\frac{\sqrt{6}}{3}-R\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2$,解得 $R=\frac{\sqrt{6}}{4}$.∵点 P 是正四面体 $ABCD$ 的表面上的一点,Q 为球 O 的球面上的一点,∴PQ 的最大值即为外接球的直径,则 PQ 的最大值为 $2R=2\times\frac{\sqrt{6}}{4}=\frac{\sqrt{6}}{2}$.故选 D.



7. ABD 【解析】对于 A,因为圆台的上、下底面半径分别为 1 和 3,母线长为 $2\sqrt{2}$,所以圆台的高为 $\sqrt{(2\sqrt{2})^2-(3-1)^2}=2$,易知圆台的轴截面为等腰梯形,设底角为 θ,则 $\tan\theta=\frac{2}{3-1}=1$,故 $\theta=45^\circ$,A 正确;对于 B,由圆台的侧面积公式得圆台的侧面积为 $\pi\times(1+3)\times 2\sqrt{2}=8\sqrt{2}\pi$,B 正确;对于 C,由圆台的体积公式得圆台的体积为 $\frac{1}{3}\pi(1^2+1\times 3+3^2)\times 2=\frac{26}{3}\pi$,C 错误;对于 D,由题意可知球心在下底面下方,设球心到下底面的距离为 d,球的半径为 R,由勾股定理得 $9+d^2=1+(2+d)^2=R^2$,解得 $d=1$,则该球的半径 $R=\sqrt{10}$,所以该球的表面积 $S=4\pi R^2=40\pi$,D 正确.故选 ABD.

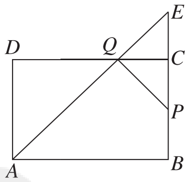
8. ABD 【解析】如图,每截去一个角,就增加了 3 条棱,2 个顶点,所以截角四面体的棱数和顶点数分别为 $6+3\times 4=18$,$4+2\times 4=12$,A 正确;截角四面体的表面由 4 个等边三角形和 4 个正六边形构成,所以其表面积为 $4\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times 4+6\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times 4\times 4=28\sqrt{3}$,B 正确;截角四面体的体积等于棱长为 6 的正四面体的体积减去 4 个棱长为 2 的正四面体的体积,设 O_1 是正六边形 $ABCDEF$ 的中心,O_2 是正三角形 MNG 的中心,连接 PO_2,PO_1,GO_2,则小正四面体的高为 $PO_2=\sqrt{PG^2-GO_2^2}=\sqrt{2^2-\left(\frac{1}{2}\times\frac{2}{\sin 60^\circ}\right)^2}=\frac{2\sqrt{6}}{3}$,大正四面体的高为 $PO_1=3PO_2=2\sqrt{6}$,所以截角四面体的体积 $V=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times 36\times 2\sqrt{6}-4\times\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times 4\times\frac{2\sqrt{6}}{3}=\frac{46}{3}\sqrt{2}$,C 错误;易知截角四面体的外接球的球心 O 在大正四面体的高上,连接 OA,OG,O_1A,设球 O 的半径为 R,在 Rt△OO_1A 中,$R^2=4+OO_1^2$,在 Rt△OO_2G 中,$R^2=O_2G^2+\left(\frac{4\sqrt{6}}{3}-OO_1\right)^2=\frac{4}{3}+\left(\frac{4\sqrt{6}}{3}-OO_1\right)^2$,所以 $OO_1=\frac{\sqrt{6}}{2}$,故 $R=\frac{\sqrt{22}}{2}$,D 正确.故选 ABD.



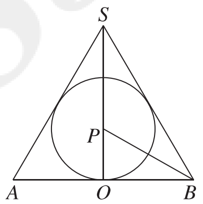
9. 2 【解析】设圆锥的底面半径为 r,因为圆锥的轴截面是正三角形,所以母线长 $l=2r$,所以 $\frac{S_{侧面积}}{S_{底面积}}=\frac{\pi rl}{\pi r^2}=\frac{2r^2}{r^2}=2$.

10. 6 【解析】连接 AC,BD,且 AC 与 BD 交于点 O,连接 VO,则 VO 就是正四棱锥 V-$ABCD$ 的高.∵底面 $ABCD$ 的面积为 16,∴$AO=2\sqrt{2}$,又 $VA=2\sqrt{11}$,∴$VO=\sqrt{VA^2-AO^2}=\sqrt{44-8}=6$,∴正四棱锥 V-$ABCD$ 的高为 6.

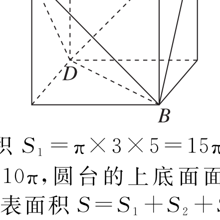
11. $\sqrt{\pi^2+9}$ 【解析】将圆柱的侧面沿 AD,BC 剪开,并将前面的一半展开,得到矩形 $ABCD$,如图,其中 $AB=\pi$,$AD=2$,P 为 BC 的中点,问题转化为在 CD 上找一点 Q,使 $AQ+PQ$ 最短.作 P 关于 CD 的对称点 E,连接 AE,则 AE 与 CD 的交点即为要找的点 Q,则 $AQ+PQ$ 的最小值为 $AE=\sqrt{\pi^2+9}$,故它所需经过的最短路程为 $\sqrt{\pi^2+9}$.



12. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ 【解析】依题意,正四面体可以在圆锥内任意转动,则当该正四面体的棱长最大时,该正四面体的外接球即为这个圆锥的内切球.设圆锥的内切球球心为 P,半径为 r,圆锥的底面圆半径为 $R=1$,如图,作出轴截面,其中 $SA=SB$,圆 P 是△SAB 的内切圆,



O 为切点,连接 SO,$OA=OB=R=1$,$SO=\sqrt{3}$,则 $SA=SB=\sqrt{SO^2+OB^2}=2$,即△SAB 为正三角形,故 P 是△SAB 的中心,连接 BP,则 BP 平分∠SBA,故∠$PBO=30^\circ$,则 $\tan 30^\circ=\frac{r}{R}$,故 $r=\frac{\sqrt{3}}{3}R=\frac{\sqrt{3}}{3}\times 1=\frac{\sqrt{3}}{3}$.设半径 $r=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 的球的内接正四面体的棱长为 m,将正四面体放到正方体中,如图.由图可知,当正四面体的棱长为 m 时,该正方体的棱长为 $\frac{\sqrt{2}}{2}m$,又正四面体的四个顶点都是正方体的顶点,所以正四面体的外接球即为该正方体的外接球,所以 $2r=\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{2}}{2}m=\frac{\sqrt{6}}{2}m$,故 $m=\frac{4r}{\sqrt{6}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$,所以 a 的最大值为 $m=\frac{2\sqrt{2}}{3}$.



13. 解:圆锥的侧面积 $S_1=\pi\times 3\times 5=15\pi$,圆台的侧面积 $S_2=\pi\times(3+2)\times 2=10\pi$,圆台的上底面面积 $S_{底}=\pi\times 2^2=4\pi$,所以该几何体的表面积 $S=S_1+S_2+S_{底}=15\pi+10\pi+4\pi=29\pi$.根据题意得,圆锥的高为 $\sqrt{5^2-3^2}=4$,圆台的高为 $\sqrt{2^2-(3-2)^2}=\sqrt{3}$,则圆锥的体积 $V_1=\frac{1}{3}\times\pi\times 3^2\times 4=12\pi$,圆台的体积 $V_2=\frac{1}{3}\times\pi\times\sqrt{3}\times(3^2+2\times 3+2^2)=$

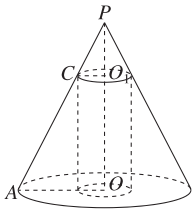
$\frac{19\sqrt{3}}{3}\pi$，所以该几何体的体积 $V=V_1+V_2=12\pi+\frac{19\sqrt{3}}{3}\pi$.

14. 解：(1)由三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 的体积 $V=S_{\triangle ABC}\cdot BB_1=2BB_1=4\sqrt{2}$，可得 $BB_1=2\sqrt{2}$. 设三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 的外接球的半径为 R，则 $2R=\sqrt{2^2+2^2+(2\sqrt{2})^2}=4$，可得 $R=2$，所以外接球的表面积为 $4\pi\times 2^2=16\pi$，体积为 $\frac{4}{3}\pi\times 2^3=\frac{32}{3}\pi$.

(2)方法一：$V_{B_1\text{-}ADC_1}=V_{三棱柱ABC\text{-}A_1B_1C_1}-V_{B_1\text{-}ABD}-V_{C_1\text{-}ADC}-V_{A\text{-}A_1B_1C_1}=4\sqrt{2}-\frac{1}{3}\times1\times2\sqrt{2}-\frac{1}{3}\times1\times2\sqrt{2}-\frac{1}{3}\times2\times2\sqrt{2}=\frac{4}{3}\sqrt{2}$.

方法二：$V_{B_1\text{-}ADC_1}=V_{A\text{-}B_1DC_1}=\frac{1}{3}S_{\triangle B_1DC_1}\cdot AB=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 2\sqrt{2}\times2\times2=\frac{4}{3}\sqrt{2}$.

15. 解：(1)①如图，记 PA 与圆柱的上底面交于点 C，连接 O_1C，OA，则 $O_1C/\!/OA$，则 $\frac{PO_1}{PO}=\frac{O_1C}{OA}$，即 $\frac{6-H}{6}=\frac{R}{3}$，整理可得 $2R+H=6$.



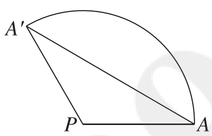
所以 R 与 H 的关系式为 $2R+H=6$.

②由①知，$6=2R+H\geqslant 2\sqrt{2R\cdot H}$，当且仅当 $R=\frac{3}{2}$，$H=3$ 时取等号，则 $R\cdot H\leqslant\frac{9}{2}$，

故内接圆柱的侧面积 $S=2\pi R\cdot H\leqslant 2\pi\times\frac{9}{2}=9\pi$，

所以当 $R=\frac{3}{2}$，$H=3$ 时，内接圆柱的侧面积取得最大值，最大值为 $9\pi\ \text{cm}^2$.

(2)由圆锥的高为 $6\sqrt{2}$ cm，底面直径为 6 cm，得圆锥的母线长 $PA=\sqrt{(6\sqrt{2})^2+3^2}=9(\text{cm})$.



把圆锥的侧面沿母线 PA 剪开并展开在平面内，得如图所示的扇形，连接 AA'，则 AA' 即为蚂蚁爬行的最短矩离，

显然弧 AA' 的长为 $2\pi\times3=6\pi(\text{cm})$，故 $\angle APA'=\frac{6\pi}{9}=\frac{2\pi}{3}$.

在 $\triangle PAA'$ 中，$PA=PA'=9$ cm，$\angle PAA'=\frac{1}{2}\left(\pi-\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{\pi}{6}$，则 $AA'=2PA\cdot\cos\frac{\pi}{6}=9\sqrt{3}(\text{cm})$，

所以蚂蚁爬行的最短距离是 $9\sqrt{3}$ cm.

8.4 空间点、直线、平面之间的位置关系

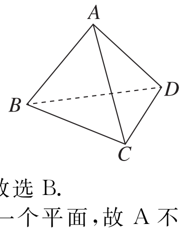
8.4.1 平面

1. C 【解析】由平面的概念和空间图形的组成和画法可知 C 正确.

2. D 【解析】用符号表示为 $A\in l$，$l\subset\alpha$. 故选 D.

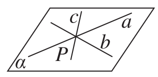
3. B 【解析】对于选项 A，经过直线与直线外一点有且只有一个平面. 对于选项 B，在对边相等的四边形中，对边有可能异面，不能确定一个平面. 对于选项 C，经过两条相交直线有且只有一个平面. 对于选项 D，经过两条平行直线有且只有一个平面. 故选 B.

4. A 【解析】如图，当 A，B，C，D 不共面时，确定的平面最多，共 4 个，即平面 ABC，平面 ABD，平面 ACD，平面 BCD.

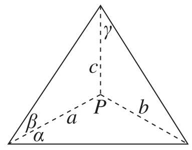


5. B 【解析】不在同一条直线上的三个点可以确定一个平面，在同一条直线上的三个点所在的平面，就是以这条直线为轴，任意旋转角度所得的平面，所以有无数个平面. 故选 B.

6. D 【解析】一条直线和直线外的一点确定一个平面，故 A 不正确. 圆心和圆上两点共线时，圆心和圆上两点确定无数个平面，故 B 不正确. 由平面的基本性质及推论可知，两两相交的三条直线可以确定的平面的个数为 1 或 3. 如图①，$a\cap b=P$，故直线 a 与 b 确定一个平面 α，若 c 在平面 α 内，则直线 a，b，c 确定一个平面；如图②，$a\cap b=P$，故直线 a 与 b 确定一个平面 α，若 c 不在平面 α 内，则直线 a，b，c 确定三个平面. 故 C 错误. 因为梯形的一组对边平行，所以由"两条平行直线确定一个平面"知，梯形可以确定一个平面，故 D 正确. 故选 D.



①



②

7. D 【解析】当 α 过 β 与 γ 的交线时，这三个平面有 1 条交线；当 β 与 γ 没有交线，α 与 β 和 γ 各有一条交线时，这三个平面共有 2 条交线；当 $\beta\cap\gamma=b$，$\alpha\cap\beta=a$，$\alpha\cap\gamma=c$ 且 a，b，c 不重合时，这三个平面共有 3 条交线. 故选 D.

8. B 【解析】因为 $M\in PQ$，直线 $PQ\subset$平面 PQR，$M\in BC$，直线 $BC\subset$平面 BCD，所以 M 是平面 PQR 与平面 BCD 的一个公共点，所以 M 在平面 PQR 与平面 BCD 的交线上，同理可证，N，K 也在平面 PQR 与平面 BCD 的交线上，所以 M，N，K 三点共线，所以①正确；因为 $N\notin$平面 PCM，所以②错误；因为 $BC\cap NK=M$，所以③错误. 故选 B.

9. ABD 【解析】$A\in a$，$A\in\alpha$，$B\in a$，$B\in\alpha$，由基本事实 2 可得 $a\subset\alpha$，故 A 正确；若 $M\in\alpha$，$M\in\beta$，则 M 在 α 与 β 的交线上，又 $\alpha\cap\beta=a$，$\therefore M\in a$，故 B 正确；若 $A\in\alpha$，$A\in\beta$，则 $\alpha\cap\beta=a$ 且 $A\in a$ 或 α，β 重合，故 C 错误；若 A，B，$M\in\alpha$，A，B，$M\in\beta$，且 A，B，M 不共线，由基本事实 1 可得，α，β 重合，故 D 正确. 故选 ABD.

10. $\in$ 【解析】因为点 $A\in$平面 α，点 $A\in$平面 β，所以 A 在两平面的交线上，又平面 $\alpha\cap$平面 $\beta=$直线 l，所以点 $A\in$直线 l.

11. 两条相交直线确定一个平面 【解析】由于连接对"脚"的两条线段，看它们是否相交，就知道它们是否合格，所以工人师傅运用的数学原理是"两条相交直线确定一个平面".

12. $\frac{\sqrt{6}}{2}$ 【解析】当 $CQ=1$ 时，Q 与 C_1 重合，取 A_1D_1 的中点 M，连接 AP，PC_1，C_1M，MA，AC_1，PM，则截面为四边形 APC_1M，由正方体的对称性知四边形 APC_1M 是菱形，其边长为 $\sqrt{1^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}$，易知 $AC_1=\sqrt{3}$，则 $PM=2\sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{2}$，故 $S=\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times\sqrt{2}=\frac{\sqrt{6}}{2}$.

13. 证明：$\because AB/\!/CD$，$\therefore AB$，CD 可确定一个平面，设为平面 β，$\therefore AC$ 在平面 β 内，即 E 在平面 β 内.

又 $AB\cap\alpha=B$，$CD\cap\alpha=D$，$AC\cap\alpha=E$，$\therefore B$，D，E 为平面 α 与平面 β 的公共点，根据基本事实 3 可得，B，D，E 三点共线.

14. 证明：$\because AB\neq A_1B_1$，$AB/\!/A_1B_1$，$\therefore$ 四边形 AA_1B_1B 为梯形，$\therefore AA_1$ 与 BB_1 相交，设其交点为 S，

则 $S\in AA_1$，$S\in BB_1$.

$\because BB_1\subset$平面 BCC_1B_1，$\therefore S\in$平面 BCC_1B_1.

同理可证，$S\in$平面 ACC_1A_1，

$\therefore$点 S 在平面 BCC_1B_1 与平面 ACC_1A_1 的交线上，

即 $S\in CC_1$，$\therefore AA_1$，BB_1，CC_1 三线共点.

15. (1)4 (2)7 【解析】(1)当这 4 个点为三棱锥的 4 个顶点时，可以确定的平面最多，此时可以确定 4 个平面.

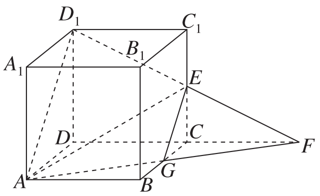
(2)当这 5 个点为四棱锥的 5 个顶点时，可以确定的平面最多，此时可以确定 7 个平面.

16. 解：(1)如图，在正方形 DCC_1D_1 中，直线 D_1E 与直线 DC 相交，设 $D_1E\cap DC=F$，连接 AF，则 AF 就是平面 AD_1E 和底面 $ABCD$ 的交线. 理由如下：

$\because F\in DC$，$DC\subset$平面 $ABCD$，$\therefore F\in$平面 $ABCD$.

$\because F\in D_1E$，$D_1E\subset$平面 AD_1E，$\therefore F\in$平面 AD_1E.

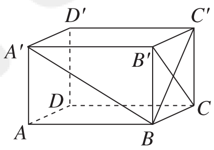
又 $A\in$平面 AD_1E，$A\in$平面 $ABCD$，$\therefore$平面 $AD_1E\cap$平面 $ABCD=AF$.



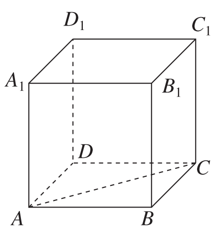
(2)设 $BC\cap AF=G$,连接 GE,由 E 为 CC_1 的中点,得 G 为 BC 的中点,∴$EG/\!/AD_1$,则平面 AD_1E 将正方体分成的两部分中,一部分是三棱台 $CGE\text{-}DAD_1$.
设正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2,在△FDD_1 中,易得 $CF=DC=2$,则 $V_{三棱台CGE\text{-}DAD_1}=V_{三棱锥F\text{-}DAD_1}-V_{三棱锥F\text{-}CGE}=\frac{7}{8}V_{三棱锥F\text{-}DAD_1}=\frac{7}{8}\times\frac{1}{3}S_{\triangle DAD_1}\times FD=\frac{7}{3}$,∴另一部分几何体的体积为 $2^3-\frac{7}{3}=\frac{17}{3}$,∴两部分的体积之比为 7∶17.

8.4.2 空间点、直线、平面之间的位置关系

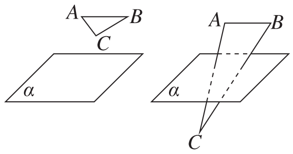
1. D 【解析】∵$A\notin\alpha$,∴过点 A 且与平面 α 平行的直线有无数条.故选 D.
2. D 【解析】因为直线 a 在平面 α 外,所以直线 a 与平面 α 平行或相交,则直线 a 与平面 α 至多有一个公共点,故选 D.
3. C 【解析】在 A 中,如果一条直线与一个平面内的无数条直线平行,那么这条直线与这个平面平行或这条直线在这个平面内,故 A 错误;在 B 中,两个平面相交于一条直线,故 B 错误;在 C 中,如果一条直线与一个平面有两个不同的公共点,那么这条直线在平面内,它们必有无数个公共点,故 C 正确;在 D 中,当平面外的一条直线与平面相交时,平面外的这条直线必与该平面内的任何直线都不平行,故 D 错误.故选 C.
4. C 【解析】在三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 中,$BB_1/\!/AA_1$,$CC_1/\!/AA_1$,B_1C_1 与 AA_1 异面,$AA_1\cap AB=A$,故选 C.
5. D 【解析】两条异面直线在一个平面上的射影可以是两条相交直线、两条平行直线、一条直线和一个点.故选 D.
6. D 【解析】因为 $\alpha\cap\beta=l$,所以 $l\subset\alpha$,$l\subset\beta$,则 l 与 m 平行或相交,l 与 n 平行或相交,又 m,n 为异面直线,所以 l 不能与 m,n 同时平行,即 l 与 m,n 可能都相交,也可能与其中一条相交,故 A,B,C 错误,D 正确.故选 D.
7. B 【解析】对于 A,直线 MN 与直线 PQ 相交,不是异面直线,不符合题意;对于 B,直线 MN 与直线 PQ 是异面直线,符合题意;对于 C,直线 MN 与直线 PQ 相交,不是异面直线,不符合题意;对于 D,直线 MN 与直线 PQ 平行,不是异面直线,不符合题意.故选 B.
8. A 【解析】直线 CE 与正方体的上底面所在平面平行,在正方体的下底面所在平面内,与其他四个平面相交;直线 EF 与正方体的左、右两个面所在平面平行,与其他四个平面相交,所以 $m=4$,$n=4$,故选 A.
9. ABC 【解析】对于 A,空间中两条直线的位置关系有平行、相交和异面三种,故 A 中说法错误;对于 B,若空间中两条直线没有公共点,则这两条直线异面或平行,故 B 中说法错误;对于 C,和两条异面直线都相交的两条直线是异面直线或相交直线,故 C 中说法错误;对于 D,如图,在长方体 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$ 中,当 $A'B$ 所在直线为 a,BC' 所在直线为 b 时,a 与 b 相交,当 $A'B$ 所在直线为 a,$B'C$ 所在直线为 b 时,a 与 b 异面,所以若两条直线分别是长方体的相邻两个面的面对角线所在的直线,则这两条直线可能相交,也可能异面,故 D 中说法正确.故选 ABC.



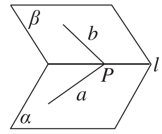
10. 平行或异面 【解析】如图,在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中,连接 AC,把平面 $ABCD$ 看作是平面 α,平面 $A_1B_1C_1D_1$ 看作是平面 β,可知平面 $ABCD/\!/$平面 $A_1B_1C_1D_1$,$AB/\!/A_1B_1$,AC 与 A_1B_1 异面,平面 $ABCD$ 与平面 $A_1B_1C_1D_1$ 内的直线均没有公共点,故 m,n 的位置关系是平行或异面.



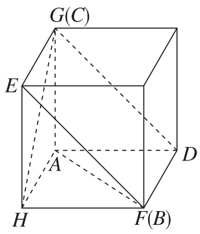
11. 4 6 【解析】六棱柱的两个底面互相平行,每个侧面与其相对的侧面平行,故共有 4 对互相平行的面.六棱柱共有 8 个面,与其中一个侧面平行的面有 1 个,其余 6 个面与该侧面均相交.
12. ① 【解析】如图,三点 A,B,C 可能在 α 同侧,也可能在 α 两侧,当 A,B,C 在 α 同侧时,AB,BC,AC 均与 α 平行,当 A,B,C 在 α 两侧时,△ABC 的两条边与 α 相交,另一条边所在直线与 α 平行,故只有①是真命题.



13. **证明:**如图,∵$a\cap b=P$,
∴$P\in a$,$P\in b$,
又 $b\subset\beta$,∴$P\in\beta$.
∴α 与 β 有公共点 P,
又 $a\not\subset\beta$,∴a 与 β 相交.
同理,b 与 α 相交.



14. **证明:**假设直线 BC_1 与直线 A_1C 不是异面直线,则直线 BC_1 与直线 A_1C 共面.设直线 BC_1 与直线 A_1C 所在的平面为 α,则 $B,C,C_1,A_1\in\alpha$,∵不在同一条直线上的 B,C,C_1 三点确定的平面为平面 BCC_1B_1,∴平面 BCC_1B_1 为 α,∴$A_1\in$平面 BCC_1B_1,显然这与事实相矛盾,故假设不成立.故直线 BC_1 与直线 A_1C 是异面直线.
15. ABD 【解析】还原后的正方体如图所示,其中点 C 与 G 重合,点 F 与 B 重合,则 $C\in GH$,故 A 正确;CD 与 EF 平行,故 CD 与 EF 是共面直线,故 B 正确;AB 与 EF 是相交直线,故 C 错误;GH 与 EF 是异面直线,故 D 正确.故选 ABD.

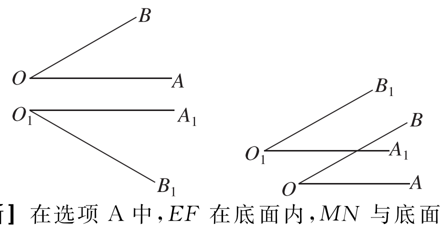


16. **解:**平面 ABC 与平面 β 的交线与 l 相交.
证明如下:∵AB 与 l 不平行,且 $AB\subset\alpha$,$l\subset\alpha$,∴AB 与 l 一定相交.设 $AB\cap l=P$,则 $P\in AB$,$P\in l$.
又∵$AB\subset$平面 ABC,$l\subset\beta$,∴$P\in$平面 ABC,$P\in\beta$.
∴点 P 是平面 ABC 与 β 的一个公共点.
而点 C 也是平面 ABC 与 β 的一个公共点,且 P,C 是不同的两点,∴直线 PC 就是平面 ABC 与 β 的交线,即平面 $ABC\cap\beta=PC$,而 $PC\cap l=P$,∴平面 ABC 与 β 的交线与 l 相交.

8.5 空间直线、平面的平行

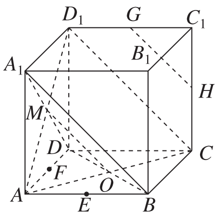
8.5.1 直线与直线平行

1. C 【解析】已知 $\angle BAC=30°$,$AB/\!/A'B'$,$AC/\!/A'C'$.当两个角的两组对边方向相同或相反时,$\angle B'A'C'=30°$;当两个角的一组对边方向相同,另一组对边的方向相反时,$\angle B'A'C'=150°$.故选 C.
2. D 【解析】当 a 与 c 异面,b 与 c 异面时,a 与 b 可能相交、平行,也可能异面,故 A 不正确;当 a 与 b 相交,b 与 c 相交时,a 与 c 可能相交、平行,也可能异面,故 B 不正确;当 $a\subset$平面 α,$b\subset$平面 β 时,a 与 b 可能平行、相交,也可能异面,故 C 不正确;由基本事实 4 知 D 正确.故选 D.
3. B 【解析】根据等角定理知,这两个三角形的三个角对应相等,所以这两个三角形相似.故选 B.
4. D 【解析】如图,当 $\angle AOB=\angle A_1O_1B_1$,且 $OA/\!/O_1A_1$,$\overrightarrow{OA}$ 与 $\overrightarrow{O_1A_1}$ 的方向相同时,OB 与 O_1B_1 不一定平行.故选 D.

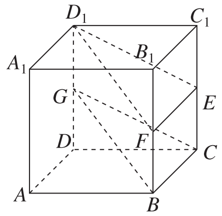


5. C 【解析】在选项 A 中,EF 在底面内,MN 与底面相交,且 EF 不经过 MN 与底面的交点,可知 EF 与 MN 为异面直线.同理可知选项 B 和选项 D 中 EF 与 MN 不平行.在选项 C 中,如果 EF,MN 都和底面与 EF 所在侧面的交线平行,那么由基本事实 4 可知,$EF/\!/MN$.故选 C.

6. A 【解析】如图，设 $AD_1\cap A_1D=M$，$AC\cap BD=O$，连接 OM，因为 $O,M\in$ 平面 ACD_1，$O,M\in$ 平面 BDA_1，所以平面 $ACD_1\cap$ 平面 $BDA_1=OM$. 由正方体的性质可知 O,M 分别是 AC，AD_1 的中点，所以 $MO/\!/CD_1$，同理得 $GH/\!/CD_1$，所以 $MO/\!/GH$. 故选 A.



7. B 【解析】连接 EF，如图所示. 依题意得 $EC/\!/D_1G$ 且 $EC=D_1G$，所以四边形 $ECGD_1$ 为平行四边形，所以 $GC/\!/D_1E$，同理可得 $GB/\!/D_1F$，根据空间等角定理可知 $\angle ED_1F=\angle CGB$ 或 $\angle ED_1F$ 与 $\angle CGB$ 互补，显然 $\angle ED_1F$ 与 $\angle CGB$ 不互补，所以 $\angle ED_1F=\angle CGB$. 在长方体中，可知 $BC\perp CG$，即 $\angle BCG=90°$，又 $\angle GBC=70°$，所以 $\angle ED_1F=\angle CGB=20°$. 故选 B.



8. A 【解析】∵四边形 $ABCD$ 为梯形，$AB/\!/CD$，E,F 分别为 BC,AD 的中点，∴$EF/\!/AB$ 且 $EF=\frac{1}{2}(AB+CD)$，则 $AB/\!/EF/\!/C'D'$. ∵G,H 分别为 AD',BC' 的中点，∴$GH/\!/AB$ 且 $GH=\frac{1}{2}(AB+C'D')=\frac{1}{2}(AB+CD)$，∴$GH\mathrel{\underline{/\!/}}EF$，∴四边形 $EFGH$ 一定为平行四边形，故选 A.

9. CD 【解析】假设 $l/\!/AD$，则由 $AD/\!/BC/\!/B_1C_1$，知 $l/\!/B_1C_1$，这与 l 与 B_1C_1 不平行矛盾，∴l 与 AD 不平行，故 A 不可能成立；∵l 在平面 $A_1B_1C_1D_1$ 内，AD 在平面 $ABCD$ 内，∴l 与 AD 无公共点，∴l 与 AD 不相交，故 B 不可能成立；易知 C，D 可能成立. 故选 CD.

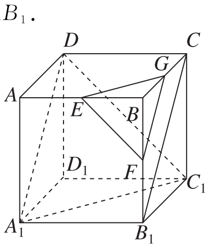
10. 异面或相交 【解析】因为 l_1,l_2 为异面直线，直线 $l_3/\!/l_1$，所以 l_3 与 l_2 的位置关系是异面或相交 .

11. $\angle D_1DC$，$\angle D_1C_1C$，$\angle A_1B_1B$

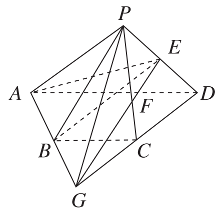
12. $\frac{3}{2}$ 【解析】E,F,G,H 分别为空间四边形 $ABCD$ 的边 AB,BC,CD,DA 上的点，且 $AC=6$，$BD=4$，设 $\frac{AE}{BE}=\frac{AH}{DH}=\frac{CF}{BF}=\frac{CG}{DG}=x$，则此时 $EH/\!/BD/\!/FG$，$EF/\!/AC/\!/GH$，且 $EH=GF=\frac{x}{1+x}\cdot BD=\frac{4x}{1+x}$，$EF=GH=\frac{1}{1+x}\cdot AC=\frac{6}{1+x}$，令 $\frac{4x}{1+x}=\frac{6}{1+x}$，解得 $x=\frac{3}{2}$，此时四边形 $EFGH$ 为菱形.

13. **证明：**连接 DC_1，在长方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，易知 $AD\mathrel{\underline{/\!/}}B_1C_1$，∴四边形 ADC_1B_1 是平行四边形，∴$AB_1/\!/DC_1$. 在 $\triangle CDC_1$ 中，∵E,F 分别是 CD,CC_1 的中点，∴$EF/\!/DC_1$，∴由基本事实 4 知，$EF/\!/AB_1$.

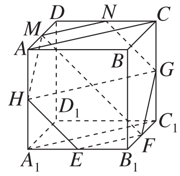
14. **证明：**如图，连接 B_1C.
因为 G,F 分别为 BC,BB_1 的中点，所以 $GF/\!/B_1C$ 且 $GF=\frac{1}{2}B_1C$.
因为几何体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 为正方体，所以 $CD/\!/AB$ 且 $CD=AB$，$A_1B_1/\!/AB$ 且 $A_1B_1=AB$，
由基本事实 4 知 $CD/\!/A_1B_1$ 且 $CD=A_1B_1$，所以四边形 A_1B_1CD 为平行四边形，
所以 $A_1D/\!/B_1C$ 且 $A_1D=B_1C$.
又 $B_1C/\!/FG$，所以由基本事实 4 知 $A_1D/\!/FG$.
同理可证 $A_1C_1/\!/EG$，$DC_1/\!/EF$.
因为 $\angle DA_1C_1$ 与 $\angle EGF$，$\angle A_1C_1D$ 与 $\angle GEF$ 的两边分别对应平行且均为锐角，
所以 $\angle DA_1C_1=\angle EGF$，$\angle A_1C_1D=\angle GEF$，
所以 $\triangle EFG\backsim\triangle C_1DA_1$.



15. 2 【解析】如图，延长 DC,AB，交于点 G，连接 PG,EG，则 EG 交 PC 于点 F. ∵$AD/\!/BC$，且 $AD=2BC$，∴点 B,C 分别是 AG,DG 的中点，又∵点 E 是 PD 的中点，∴PC 和 GE 均是 $\triangle PDG$ 的中线，∴点 F 是 $\triangle PDG$ 的重心，∴$\frac{PF}{FC}=2$.



16. **解：**(1)证明：如图所示，连接 AC,A_1C_1.
在 $\triangle DAC$ 中，∵M,N 分别是 DA,DC 的中点，∴$MN/\!/AC$.
在矩形 A_1ACC_1 中，∵$AC/\!/A_1C_1$，∴由基本事实 4 可得 $MN/\!/A_1C_1$.
在 $\triangle A_1B_1C_1$ 中，∵E,F 分别是 A_1B_1，B_1C_1 的中点，
∴$EF/\!/A_1C_1$，∴由基本事实 4 可得 $MN/\!/EF$.
(2)E,F,G,H,M,N 六点共面. 证明如下：
如图，连接 MF,HG,FG,GN,MH,HE.
在矩形 AA_1C_1C 中，∵G,H 分别是 CC_1,AA_1 的中点，
∴$HG/\!/AC$，又 $MN/\!/AC$，∴由基本事实 4 得 $MN/\!/HG$，
∴MN,HG 可以确定平面 $MNGH$.
同理，NG,MF 可以确定平面 $NGFM$.
∵平面 $MNGH$ 与平面 $NGFM$ 均过不共线的三点 M,N,G，
∴平面 $MNGH$ 与平面 $NGFM$ 是同一个平面，
∴F,G,H,M,N 共面，设此平面为 α.
∵EF,HG 可以确定平面 $EFGH$，平面 $EFGH$ 与平面 α 均过不共线的三点 F,G,H，
∴平面 $EFGH$ 与平面 α 是同一个平面，
∴E,F,G,H,M,N 六点共面.



8.5.2 直线与平面平行

第 1 课时 直线与平面平行的判定

1. C 【解析】对于 A，这条直线有可能在平面内，故 A 错误；对于 B，当平面经过两点所连线段的中点时满足题意，但此时直线与平面不平行，故 B 错误；易知 C 正确；对于 D，直线不在平面内包括直线与平面平行，直线与平面相交这两种情况，故 D 错误. 故选 C.

2. D 【解析】由线面平行的判定定理可知 D 正确，故选 D.

3. A 【解析】在直线 a 上任取一点 A，则过点 A 与直线 b 平行的直线有且只有一条，设为 b'，∵$a\cap b'=A$，∴直线 a 与直线 b' 确定一个平面 α，则平面 α 即为过直线 a 且与直线 b 平行的平面，可知它是唯一的. 故选 A.

4. D 【解析】由 $a/\!/\alpha$ 推不出 $a/\!/b$，a,b 也可能异面，由 $a/\!/b$ 也推不出 $a/\!/\alpha$，a 也可能在 α 内，故"$a/\!/b$"是"$a/\!/\alpha$"的既不充分也不必要条件，故选 D.

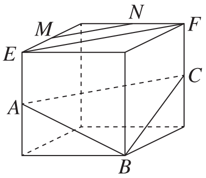
5. C 【解析】∵在长方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，E,F 分别为棱 AA_1,BB_1 的中点，∴$EF/\!/CD$，$EF/\!/AB$，$EF/\!/A_1B_1$，∴由直线与平面平行的判定定理得 $EF/\!/$平面 CDD_1C_1，$EF/\!/$平面 $ABCD$，$EF/\!/$平面 $A_1B_1C_1D_1$，则满足条件的平面有 3 个. 故选 C.

6. B 【解析】因为 $AE:EB=AF:FD=1:4$，所以 $EF/\!/BD$，且 $EF=\frac{1}{5}BD$，又 $BD\subset$平面 BCD，$EF\not\subset$平面 BCD，所以 $EF/\!/$平面 BCD. 因为 H,G 分别为棱 BC,CD 的中点，所以 $HG/\!/BD$，且 $HG=\frac{1}{2}BD$，则 $EF/\!/HG$，$EF\neq HG$，所以四边形 $EFGH$ 为梯形，故选 B.

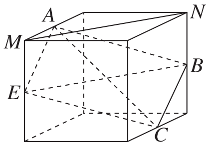
7. C 【解析】由题意知，$OM\cap$平面 $PBA=M$，$OM\cap$平面 $PBC=M$，$OM/\!/PD$，又 $PD\subset$平面 PCD，$PD\subset$平面 PDA，$OM\not\subset$平面 PCD，$OM\not\subset$平面 PDA，所以 $OM/\!/$平面 PCD，$OM/\!/$平面 PDA. 故选 C.

8. ABC 【解析】对于 A，如图①所示，连接 EF，易得 $AC/\!/EF$，$MN/\!/EF$，则 $MN/\!/AC$，又 $MN\not\subset$平面 ABC，$AC\subset$平面 ABC，所以 $MN/\!/$平面 ABC，故 A 满足. 对于 B，如图②所示，E 为所在棱的中点，连接 EA,EC,EB，易得 $AE=BC$，$AE/\!/BC$，则四边形 $ABCE$ 为平行四边形，A,B,C,E 四点共面. 易知 $MN/\!/BE$，又 $MN\not\subset$平面 ABC，$BE\subset$平面 ABC，所以 $MN/\!/$平面 ABC，故 B 满足. 对于 C，如图③所示，D 为所在棱

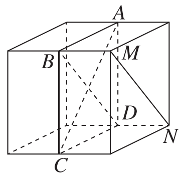
的中点，连接 DA,DC,DB，易得四边形 $ABCD$ 为平行四边形，A,B,C,D 四点共面，且 $MN/\!/BD$，又 $MN\not\subset$ 平面 ABC，$BD\subset$ 平面 ABC，所以 $MN/\!/$ 平面 ABC，故 C 满足. 对于 D，如图④所示，连接 AM,BN，由条件及正方体的性质可知四边形 $AMNB$ 是等腰梯形，所以 AB 与 MN 所在的直线相交，故 MN 与平面 ABC 不平行，故 D 不满足. 故选 ABC.



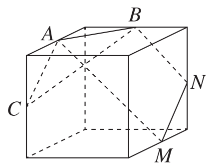
①



②



③



④

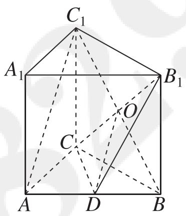
9. ACD 【解析】连接 PM，因为 M,P 分别为棱 AB,CD 的中点，所以 $PM/\!/AD$，且 $PM=AD$，由题意知 $AD/\!/A_1D_1$，且 $AD=A_1D_1$，所以 $PM/\!/A_1D_1$ 且 $PM=A_1D_1$，所以四边形 PMA_1D_1 为平行四边形，所以 $A_1M/\!/D_1P$，故 A 正确；显然 A_1M 与 B_1Q 为异面直线，故 B 错误；因为 $A_1M/\!/D_1P$，$D_1P\subset$ 平面 DCC_1D_1，$D_1P\subset$ 平面 D_1PQB_1，$A_1M\not\subset$ 平面 DCC_1D_1，$A_1M\not\subset$ 平面 D_1PQB_1，所以 $A_1M/\!/$ 平面 DCC_1D_1，$A_1M/\!/$ 平面 D_1PQB_1，故 C，D 正确. 故选 ACD.

10. $b\not\subset\alpha$ 【解析】由直线与平面平行的判定定理可知，还要保证直线 b 在平面 α 外，即 $b\not\subset\alpha$.

11. 平行 【解析】连接 AG 并延长，交 BC 于点 M，连接 SM，则 $AG=2GM$，又 $AE=2ES$，所以 $EG/\!/SM$. 因为 $EG\not\subset$ 平面 SBC，$SM\subset$ 平面 SBC，所以 $EG/\!/$ 平面 SBC.

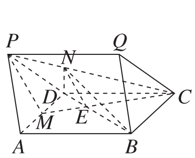
12. P 是 CC_1 的中点(答案不唯一) 【解析】当 P 是 CC_1 的中点时，易得 $A_1D/\!/PC$，$A_1D=PC$，所以四边形 A_1DCP 为平行四边形，所以 $A_1P/\!/DC$. 又因为 $A_1P\not\subset$ 平面 BCD，$DC\subset$ 平面 BCD，所以 $A_1P/\!/$ 平面 BCD.

13. **证明**：如图，连接 BC_1 交 CB_1 于点 O，连接 OD.



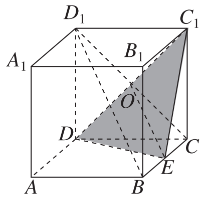
$\because O,D$ 分别是 BC_1,AB 的中点，
$\therefore OD$ 是 $\triangle ABC_1$ 的中位线，
$\therefore AC_1/\!/OD$，
又 $AC_1\not\subset$ 平面 CDB_1，$OD\subset$ 平面 CDB_1，
$\therefore AC_1/\!/$ 平面 CDB_1.

14. **证明**：连接 MC 交 BD 于 E，连接 NE，如图.

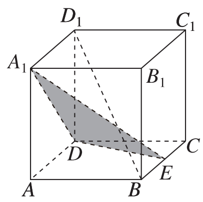


因为侧面 $ABCD$ 为矩形，
所以 $AD/\!/BC$，又 M 为 AD 的中点，
所以 $\dfrac{EC}{EM}=\dfrac{BC}{DM}=2$，
又因为 $NC=2PN$，
所以 $\dfrac{NC}{PN}=\dfrac{CE}{EM}=2$，
所以 $PM/\!/NE$，
又 $PM\not\subset$ 平面 BDN，$NE\subset$ 平面 BDN，
所以 $PM/\!/$ 平面 BDN.

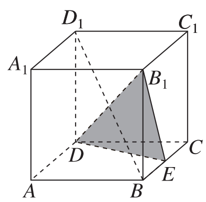
15. A_1,B_1,D 【解析】由题意知，平面 DEP 必定经过正方体的顶点 D. 下面分析正方体除 D 外的顶点，满足题意的正方体的顶点与 DE 确定的平面必然与直线 BD_1 相交，且交点不为 B,D_1，显然顶点 A,B,C,D_1 都不符合题意. 现分析顶点 C_1，如图①，连接 C_1E,DC_1,CD_1，设 $DC_1\cap CD_1=O$，连接 EO. 因为 O,E 分别为 CD_1,BC 的中点，所以 $BD_1/\!/EO$，又 $EO\subset$ 平面 DEC_1，$BD_1\not\subset$ 平面 DEC_1，所以 $BD_1/\!/$ 平面 DEC_1，故 C_1 不符合题意. 根据正方体的特征，结合图②和图③可知，平面 A_1DE、平面 B_1DE 均与直线 BD_1 相交，所以 A_1,B_1 均符合题意. 综上，平面 DEP 可能经过的该正方体的顶点是 A_1,B_1,D.



①



②



③

16. **解**：(1)证明：连接 BD，设 BD 与 AC 的交点为 O，连接 EO. 因为四边形 $ABCD$ 为矩形，所以 O 为 BD 的中点，又 E 为 PD 的中点，所以 $EO/\!/PB$. 又 $EO\subset$ 平面 AEC，$PB\not\subset$ 平面 AEC，所以 $PB/\!/$ 平面 AEC.

(2)当 G 为 PC 的中点时，$FG/\!/$ 平面 AEC. 证明如下：连接 GE，因为 E 为 PD 的中点，G 为 PC 的中点，所以 $GE/\!/CD$，且 $GE=\dfrac{1}{2}CD$. 因为 F 为 AB 的中点，且四边形 $ABCD$ 为矩形，所以 $FA/\!/CD$，且 $FA=\dfrac{1}{2}CD$，所以 $FA/\!/GE$，且 $FA=GE$，所以四边形 $AFGE$ 为平行四边形，所以 $FG/\!/AE$. 又 $FG\not\subset$ 平面 AEC，$AE\subset$ 平面 AEC，所以 $FG/\!/$ 平面 AEC.

第 2 课时 直线与平面平行的性质

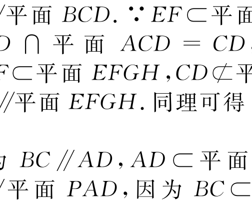
1. B 【解析】对于 A，若直线 l 上有无数个点不在平面 α 内，则 $l/\!/\alpha$ 或 l 与 α 相交，A 错误；对于 B，若直线 l 与平面 α 平行，则存在过直线 l 的平面与平面 α 相交，设交线为 c，则 $l/\!/c$，显然在平面 α 内有无数条直线与 c 平行，这些直线都与 l 平行，B 正确；对于 C，若两条平行直线中的一条与一个平面平行，则另一条与这个平面平行或在这个平面内，C 错误；对于 D，若直线 l 与平面 α 平行，则 l 与平面 α 内的直线平行或是异面，不会与平面 α 内的任意一条直线都平行，D 错误. 故选 B.

2. A 【解析】过点 A 作直线 m 的平行线 l，则经过直线 l 且不经过直线 m 的所有平面均与直线 m 平行，所以满足条件的平面有无数个. 故选 A.

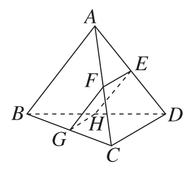
3. D 【解析】对于 A，当经过 b 的平面也经过 a 时，a 与该平面不平行，故 A 为假命题；对于 B，a 与 α 内的直线平行或异面，故 B 为假命题；对于 C，直线 a 与 b 平行、相交、异面都有可能，故 C 为假命题；对于 D，若 $a/\!/\alpha$，过 a 作平面交 α 于直线 c，则 $a/\!/c$，又因为 $a/\!/b$，所以 $b/\!/c$，又 $b\not\subset\alpha$，$c\subset\alpha$，所以 $b/\!/\alpha$，故 D 为真命题. 故选 D.

4. D 【解析】在空间中，若直线 $l/\!/$ 平面 α，则由直线 $l_1/\!/l$ 可得 $l_1/\!/\alpha$ 或 $l_1\subset\alpha$，由 $l_1\subset\alpha$ 可得 l_1 与 l 平行或异面，故“直线 $l_1/\!/l$”是“$l_1\subset\alpha$”的既不充分也不必要条件. 故选 D.

5. C 【解析】如图，平面 $\alpha\cap$ 平面 $\beta=l$，直线 $a/\!/\alpha$，$a/\!/\beta$，过 a 作平面 $\gamma\cap\alpha=m$，$\because a/\!/\alpha$，$\therefore$ 易证 $m/\!/a$. 过 a 作平面 $\eta\cap\beta=n$，$\because a/\!/\beta$，$\therefore$ 易证 $n/\!/a$，$\therefore m/\!/n$. $\because m\not\subset\beta$，$n\subset\beta$，$\therefore m/\!/\beta$，而 $m\subset\alpha$，平面 $\alpha\cap$ 平面 $\beta=l$，$\therefore m/\!/l$. 综上，$a/\!/l$. 故选 C.



6. C 【解析】如图，平面 α 截三棱锥 $A\text{-}BCD$ 所得截面为平行四边形 $EFGH$，则 $EF/\!/GH$. $\because EF\not\subset$ 平面 BCD，$GH\subset$ 平面 BCD，$EF/\!/GH$，$\therefore EF/\!/$ 平面 BCD. $\because EF\subset$ 平面 ACD，平面 $BCD\cap$ 平面 $ACD=CD$，$\therefore EF/\!/CD$，又 $EF\subset$ 平面 $EFGH$，$CD\not\subset$ 平面 $EFGH$，$\therefore CD/\!/$ 平面 $EFGH$. 同理可得 $AB/\!/$ 平面 $EFGH$. 故选 C.



7. C 【解析】因为 $BC/\!/AD$，$AD\subset$ 平面 PAD，$BC\not\subset$ 平面 PAD，所以 $BC/\!/$ 平面 PAD，因为 $BC\subset$ 平面 $EFBC$，平面 $EFBC\cap$ 平面 $PAD=EF$，所以 $BC/\!/EF$. 因为 $BC=AD$，$EF<AD$，所以 $EF<BC$，所以四边形 $EFBC$ 为梯形，故选 C.

8. B 【解析】取 B_1C 的中点 F，连接 DF,EF. 因为 E,F 分别是 BC,B_1C 的中点，所以 $EF/\!/BB_1$，且 $EF=\dfrac{1}{2}BB_1$. 因为 $AA_1/\!/BB_1$，所以 $AA_1/\!/EF$，即 $AD/\!/EF$，所以 AD,EF 确定平面 $ADFE$. 因为 $AE\subset$ 平面 $ADFE$，$AE/\!/$ 平面 DB_1C，平面

$DB_1C\cap$平面 $ADFE=DF$，所以 $AE/\!/DF$，又 $AD/\!/EF$，所以四边形 $AEFD$ 是平行四边形，所以 $AD=EF=\frac{1}{2}BB_1$，所以 $AD=\frac{1}{2}AA_1$，即 D 为 AA_1 的中点，因此 $m=1$. 故选 B.

9. BD 【解析】在四棱锥 $P\text{-}ABCD$ 中，M,N 分别为 AC,PC 上的点，且 $MN/\!/$平面 PAD，因为 $MN\subset$平面 PAC，平面 $PAC\cap$平面 $PAD=PA$，所以由直线与平面平行的性质定理可得 $MN/\!/PA$. 因为 $MN\not\subset$平面 PAB，$PA\subset$平面 PAB，所以 $MN/\!/$平面 PAB. 故选 BD.

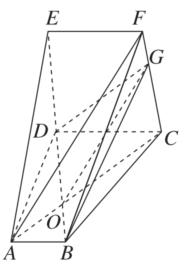
10. 平行或异面

11. 不是 【解析】折起后，$\because AD/\!/BC$，$AD\subset$平面 $ADEF$，$BC\not\subset$平面 $ADEF$，$\therefore BC/\!/$平面 $ADEF$. 假设四边形 $BCEF$ 是平面四边形，则 $BC\subset$平面 $BCEF$，$\because$平面 $BCEF\cap$平面 $ADEF=EF$，$\therefore BC/\!/EF$，与题意不符，假设不成立. 故四边形 $BCEF$ 不是平面四边形.

12. 1 【解析】连接 BC_1，设 $B_1C\cap BC_1=O$，连接 DO. $\because A_1B/\!/$平面 B_1CD，$A_1B\subset$平面 A_1BC_1，且平面 $A_1BC_1\cap$平面 $B_1CD=OD$，$\therefore A_1B/\!/OD$. $\because$四边形 BCC_1B_1 是平行四边形，$\therefore O$ 为 BC_1 的中点，$\therefore D$ 为 A_1C_1 的中点，即 $\frac{A_1D}{DC_1}=1$.

13. **证明：**因为 $BC/\!/$平面 $GEFH$，$BC\subset$平面 PBC，且平面 $PBC\cap$平面 $GEFH=GH$，所以 $GH/\!/BC$. 因为 $BC/\!/$平面 $GEFH$，$BC\subset$平面 $ABCD$，且平面 $ABCD\cap$平面 $GEFH=EF$，所以 $EF/\!/BC$，所以 $GH/\!/EF$.

14. **证明：**(1)如图，连接 AC 交 BD 于 O，连接 OG.



因为四边形 $ABCD$ 为直角梯形，$AB/\!/CD$，$AB\perp AD$，$DC=2AB$，

所以 $\frac{AO}{OC}=\frac{AB}{DC}=\frac{1}{2}$，

又因为 $GC=2FG$，所以 $\frac{GF}{CG}=\frac{1}{2}=\frac{AO}{OC}$，

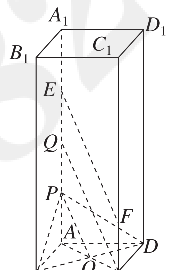
所以 $AF/\!/OG$.

因为 $OG\subset$平面 BDG，$AF\not\subset$平面 BDG，

所以 $AF/\!/$平面 BDG.

(2)因为 $AB/\!/CD$，$CD\subset$平面 $CDEF$，$AB\not\subset$平面 $CDEF$，所以 $AB/\!/$平面 $CDEF$. 因为 $AB\subset$平面 $ABFE$，平面 $CDEF\cap$平面 $ABFE=EF$，所以 $AB/\!/EF$.

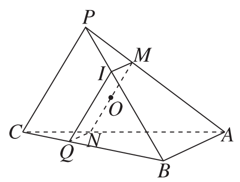
15. 2 【解析】如图，连接 AC，交 BD 于点 O，连接 PO，过点 C 作 $CQ/\!/OP$，交 AA_1 于点 Q. $\because EF/\!/$平面 PBD，$EF\subset$平面 $EACF$，平面 $EACF\cap$平面 $PBD=PO$，$\therefore EF/\!/PO$. $\because CQ/\!/OP$，$\therefore EF/\!/QC$，又 $EQ/\!/CF$，$\therefore$四边形 $EQCF$ 为平行四边形，$\therefore QE=CF$. $\because$四边形 $ABCD$ 是正方形，$\therefore O$ 是 AC 的中点，又 $CQ/\!/OP$，$\therefore PQ=AP=2$. $\because AE+CF=AP+PQ+QE+CF=2+2+CF+CF=8$，$\therefore CF=2$.



16. **解：**(1)如图，在平面 PAC 内过点 O 作直线 $MN/\!/PC$ 交 PA 于 M，交 AC 于 N，

在平面 PAB 内过点 M 作直线 $MI/\!/AB$ 交 PB 于 I，

在平面 ABC 内过点 N 作 $NQ/\!/AB$ 交 BC 于 Q，连接 IQ，则 MN,NQ,QI,IM 为截面与木块各表面的交线.



理由如下：$\because MI/\!/AB$，$NQ/\!/AB$，

$\therefore MI/\!/NQ$，$\therefore M,N,Q,I$ 四点共面.

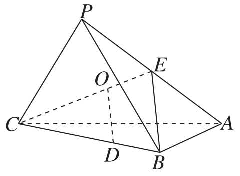
$\because AB\not\subset$平面 $MNQI$，$NQ\subset$平面 $MNQI$，

$\therefore AB/\!/$平面 $MNQI$，同理可证 $PC/\!/$平面 $MNQI$.

(2)如图，连接 CO 并延长，交 PA 于点 E，连接 BE.

若在棱 BC 上存在点 D 满足 $OD/\!/$平面 PAB，

则由平面 $BCE\cap$平面 $PAB=BE$，



$OD\subset$平面 BCE，可得 $OD/\!/BE$，$\therefore\frac{CO}{OE}=\frac{CD}{DB}$.

$\because O$ 为 $\triangle PAC$ 的重心，$\therefore\frac{CD}{DB}=\frac{CO}{OE}=2$，$\therefore$在棱 BC 上存在点 D，使得直线 $OD/\!/$平面 PAB，且 $\frac{BD}{DC}=\frac{1}{2}$.

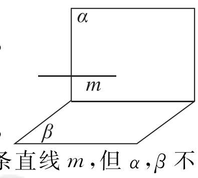
8.5.3 平面与平面平行

第 1 课时 平面与平面平行的判定

1. D 【解析】由正方体的模型知，前后面、上下面、左右面都相互平行，故选 D.

2. B 【解析】因为 $l/\!/\alpha$，$m/\!/\alpha$，$l\cap m=P$，$l\subset\beta$，$m\subset\beta$，所以 $\beta/\!/\alpha$.

3. B 【解析】对于 A 选项，若这无数条直线均平行，则无法推出 $\alpha/\!/\beta$，A 错误；对于 B 选项，由面面平行的判定定理得，若 α 内有两条相交直线与 β 平行，则 $\alpha/\!/\beta$，易知若 $\alpha/\!/\beta$，则 α 内有两条相交直线与 β 平行，B 正确；对于 C 选项，如图，α,β 平行于同一条直线 m，但 α,β 不平行，C 错误；易知 D 错误. 故选 B.

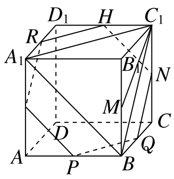


4. C 【解析】在 A 中，若 $l_1/\!/\alpha$，$l_2/\!/\alpha$，则 l_1 与 l_2 可能相交、平行或异面，故 A 错误；在 B 中，若 $l_1/\!/\alpha$，$l_2/\!/\beta$，则 α 与 β 可能相交或平行，故 B 错误；易知 C 正确；在 D 中，若 $l_1/\!/l_2$，$l_1/\!/\alpha$，则 $l_2/\!/\alpha$ 或 $l_2\subset\alpha$，故 D 错误. 故选 C.

5. B 【解析】当平面 $\alpha/\!/$平面 ABC 时，$\triangle ABC$ 的三个顶点到平面 α 的距离相等且不为零，当$\triangle ABC$ 的三个顶点到平面 α 的距离相等且不为零时，平面 α 可能与平面 ABC 相交，例如当 $BC/\!/$平面 α 且 AB,AC 的中点在平面 α 内时，$\triangle ABC$ 的三个顶点到平面 α 的距离相等且不为零，但平面 α 与平面 ABC 相交，所以 p 是 q 的必要不充分条件. 故选 B.

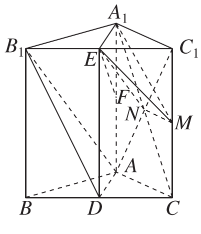
6. A 【解析】因为 $\frac{B_1E}{B_1F}=\frac{B_1D_1}{B_1A_1}$，所以 $EF/\!/A_1D_1$，所以 $EF/\!/B_1C_1$，又 $EF\not\subset$平面 BB_1C_1C，$B_1C_1\subset$平面 BB_1C_1C，所以 $EF/\!/$平面 BB_1C_1C. 因为 $EH/\!/B_1B$，$EH\not\subset$平面 BB_1C_1C，$B_1B\subset$平面 BB_1C_1C，所以 $EH/\!/$平面 BB_1C_1C，又 $EF\cap EH=E$，$EF\subset$平面 EFH，$EH\subset$平面 EFH，所以平面 $EFH/\!/$平面 BB_1C_1C. 故选 A.

7. A 【解析】由题意可知，经过 P,Q,R 三点的平面为如图所示的正六边形截面所在平面，记为 β，可知 N 在平面 β 上，所以 B，C 不正确. 由图可知 $QN/\!/BC_1$，因为 $MC_1\cap BC_1=C_1$，所以 MC_1 与 QN 是相交直线，所以 D 不正确. 因为 $RH/\!/A_1C_1$，$RH\subset\beta$，$A_1C_1\not\subset\beta$，所以 $A_1C_1/\!/\beta$. 同理 $A_1B/\!/\beta$. 因为 $A_1C_1\cap A_1B=A_1$，$A_1C_1\subset$平面 A_1BC_1，$A_1B\subset$平面 A_1BC_1，所以平面 $A_1BC_1/\!/\beta$. 故选 A.



8. AC 【解析】对于 A，α 内有无数条直线与 β 平行不能推出 $\alpha/\!/\beta$，但由 $\alpha/\!/\beta$ 可以推出 β 平行于 α 内的任意一条直线，故"α 内有无数条直线与 β 平行"是"$\alpha/\!/\beta$"的必要不充分条件；对于 B，α 内有两条相交直线与 β 平行能推出 $\alpha/\!/\beta$，故"α 内有两条相交直线与 β 平行"是"$\alpha/\!/\beta$"的充分条件；对于 C，α,β 垂直于同一平面不能推出 $\alpha/\!/\beta$，但由 $\alpha/\!/\beta$ 能推出 α,β 垂直于同一平面，故"α,β 垂直于同一平面"是"$\alpha/\!/\beta$"的必要不充分条件；对于 D，α,β 平行于同一平面能推出 $\alpha/\!/\beta$，故"α,β 平行于同一平面"是"$\alpha/\!/\beta$"的充分条件. 故选 AC.

9. ABC 【解析】连接 AC_1,ED，如图所示，则 N 为 AC_1 的中点，又 E 是 B_1C_1 的中点，所以 $EN/\!/AB_1$，又 $AB_1\subset$平面 ADB_1，$EN\not\subset$平面 ADB_1，所以 $EN/\!/$平面 ADB_1. 因为四边形 BCC_1B_1 是矩形，D,E 分别为 BC,B_1C_1 的中点，所以 $DE/\!/BB_1$，$DE=BB_1$，可得 $DE/\!/AA_1$，$DE=AA_1$，所以四边形 $ADEA_1$ 是平行四边形，所以 $A_1E/\!/AD$，又 $AD\subset$平面 ADB_1，$A_1E\not\subset$平面 ADB_1，所以 $A_1E/\!/$平面 ADB_1，又 $A_1E\subset$平面 A_1EN，$EN\subset$平面 A_1EN，$A_1E\cap EN=E$，所以平面 $A_1EN/\!/$平面 ADB_1，所以 D 中说法正确. 因为 EF,A_1M 均与平面 A_1EN 相交，所以 EF,A_1M 均与平面 ADB_1 相交，所以 A，B 中说法都不正

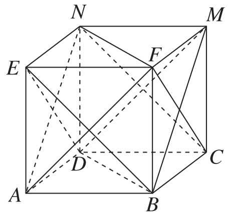


确.因为 MN 与 AC 平行,AC 与平面 ADB_1 相交,所以 MN 与平面 ADB_1 也相交,所以 C 中说法不正确.故选 ABC.

10. 相交或平行 【解析】若 $\alpha/\!/\beta$,则存在 $a\subset\alpha$,$b,c\subset\beta$,使得 $a/\!/b/\!/c$,满足条件;若 α 与 β 相交,设交线为 l,则存在 $a\subset\alpha$,$b,c\subset\beta$,$b/\!/c/\!/l$,$a/\!/l$,也满足条件.

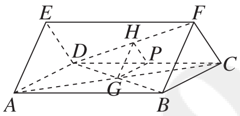
11. $a\subset\alpha,b\subset\alpha,a\cap b=A,a/\!/\beta,b/\!/\beta\Rightarrow\alpha/\!/\beta$ 【解析】平面与平面平行的判定定理是:如果一个平面内的两条相交直线与另一个平面平行,那么这两个平面平行.用符号语言表述为 $a\subset\alpha,b\subset\alpha,a\cap b=A,a/\!/\beta,b/\!/\beta\Rightarrow\alpha/\!/\beta$.

12. ①③④ 【解析】把正方体的展开图还原成正方体 $ABCD$-$EFMN$,如图.由 $AB/\!/CD/\!/MN$,$AB=CD=MN$,得四边形 $ABMN$ 为平行四边形,则 $BM/\!/AN$,同理 $CN/\!/BE$,$BD/\!/FN$.对于①,由 $BM/\!/AN$,$BM\not\subset$ 平面 ADE,$AN\subset$ 平面 ADE,得 $BM/\!/$ 平面 ADE,①正确.对于②,由 $CN/\!/BE$,BE 与 AF 相交,得 CN 与 AF 不平行,②错误.对于③,因为 $BD/\!/FN$,$BD\not\subset$ 平面 AFN,$FN\subset$ 平面 AFN,所以 $BD/\!/$ 平面 AFN.因为 $BM/\!/AN$,$BM\not\subset$ 平面 AFN,$AN\subset$ 平面 AFN,所以 $BM/\!/$ 平面 AFN,又 $BD\cap BM=B$,BD,$BM\subset$ 平面 BDM,所以平面 $BDM/\!/$ 平面 AFN,③正确.对于④,因为 $BD/\!/FN$,$BD\not\subset$ 平面 NCF,$FN\subset$ 平面 NCF,所以 $BD/\!/$ 平面 NCF.因为 $BE/\!/CN$,$BE\not\subset$ 平面 NCF,$CN\subset$ 平面 NCF,所以 $BE/\!/$ 平面 NCF.又 $BD\cap BE=B$,BD,$BE\subset$ 平面 BDE,所以平面 $BDE/\!/$ 平面 NCF,④正确.故填①③④.



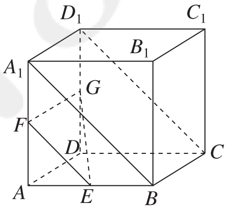
13. **证明**:∵ G,H,I 分别是 EC,FB,FC 的中点,∴ $HI/\!/BC$,$GI/\!/EF$.∵ $EF/\!/DB$,∴ $GI/\!/DB$,∵ $HI/\!/BC$,$BC\subset$ 平面 ABC,$HI\not\subset$ 平面 ABC,∴ $HI/\!/$ 平面 ABC.∵ $GI/\!/DB$,$BD\subset$ 平面 ABC,$GI\not\subset$ 平面 ABC,∴ $GI/\!/$ 平面 ABC.又 $HI\subset$ 平面 GHI,$GI\subset$ 平面 GHI,$HI\cap GI=I$,∴ 平面 $GHI/\!/$ 平面 ABC.

14. **解**:(1)证明:如图,连接 DB,则 G 为 DB 的中点,又 H 为 DF 的中点,∴ GH 为 $\triangle DBF$ 的中位线,∴ $GH/\!/BF$.



(2)在棱 CD 上存在点 P 使得平面 $GHP/\!/$ 平面 BCF,且 P 为 CD 的中点,证明如下:∵ P,H 分别为 CD,DF 的中点,∴ $HP/\!/FC$,又 $HP\not\subset$ 平面 BCF,$FC\subset$ 平面 BCF,∴ $HP/\!/$ 平面 BCF.由(1)知 $GH/\!/BF$,又 $GH\not\subset$ 平面 BCF,$BF\subset$ 平面 BCF,∴ $GH/\!/$ 平面 BCF,又 $HP\cap GH=H$,$HP\subset$ 平面 GHP,$GH\subset$ 平面 GHP,∴ 平面 $GHP/\!/$ 平面 BCF.

15. 2 【解析】如图,因为 $A_1D_1/\!/BC$,所以 A_1,B,C,D_1 四点共面,连接 CD_1,A_1B.因为 E,F 分别为 AB,AA_1 的中点,所以 $EF/\!/A_1B$,又 $EF\subset$ 平面 EFG,$A_1B\not\subset$ 平面 EFG,所以 $A_1B/\!/$ 平面 EFG.因为 F,G 分别为 AA_1,DD_1 的中点,所以 $FG/\!/A_1D_1$,又 $FG\subset$ 平面 EFG,$A_1D_1\not\subset$ 平面 EFG,所以 $A_1D_1/\!/$ 平面 EFG.又 $A_1B\cap A_1D_1=A_1$,A_1B,$A_1D_1\subset$ 平面 A_1BCD_1,所以平面 $EFG/\!/$ 平面 A_1BCD_1,又平面 $BCC_1B_1\cap$ 平面 $A_1BCD_1=BC$,所以当且仅当点 P 在棱 BC 上时,满足 $D_1P/\!/$ 平面 EFG,所以点 P 的轨迹长度为 2.



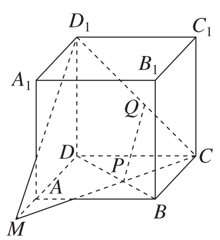
16. **解**:(1)证明:连接 CP 并延长与 DA 的延长线交于点 M,连接 MD_1,如图.

因为四边形 $ABCD$ 为正方形,所以 $BC/\!/AD$,故 $\triangle PBC\backsim\triangle PDM$,

所以 $\dfrac{CP}{PM}=\dfrac{BP}{PD}=\dfrac{2}{3}$,

又因为 $\dfrac{CQ}{QD_1}=\dfrac{BP}{PD}=\dfrac{2}{3}$,

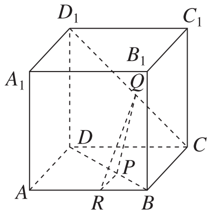
所以 $\dfrac{CQ}{QD_1}=\dfrac{CP}{PM}=\dfrac{2}{3}$,所以 $PQ/\!/MD_1$.



又 $MD_1\subset$ 平面 A_1D_1DA,$PQ\not\subset$ 平面 A_1D_1DA,所以 $PQ/\!/$ 平面 A_1D_1DA.

(2)当 $\dfrac{AR}{AB}$ 的值为 $\dfrac{3}{5}$ 时,能使平面 $PQR/\!/$ 平面 A_1D_1DA.

证明如下:因为 $\dfrac{AR}{AB}=\dfrac{3}{5}$,所以 $\dfrac{BR}{RA}=\dfrac{2}{3}$,故 $\dfrac{BR}{RA}=\dfrac{BP}{PD}$,所以 $PR/\!/DA$.



又 $DA\subset$ 平面 A_1D_1DA,$PR\not\subset$ 平面 A_1D_1DA,所以 $PR/\!/$ 平面 A_1D_1DA,

又由(1)知 $PQ/\!/$ 平面 A_1D_1DA,$PQ\cap PR=P$,PQ,$PR\subset$ 平面 PQR,所以平面 $PQR/\!/$ 平面 A_1D_1DA.

第 2 课时　平面与平面平行的性质

1. A 【解析】平面与平面平行,则两个平面没有公共点,所以在一个平面内的直线和另一个平面没有公共点,所以这条直线与另一个平面平行.故选 A.

2. B 【解析】"经过两条平行直线,有且只有一个平面"是根据基本事实 1 与基本事实 2,结合"两点确定一条直线"得到的三个推论之一,故 A 中说法正确;平面与平面平行的性质定理为"两个平面平行,如果另一个平面与这两个平面相交,那么两条交线平行",故 B 中说法错误;由直线与平面平行的判定定理可知 C 中说法正确;若 $\alpha/\!/\beta$,$m/\!/\alpha$,则 $m\subset\beta$ 或 $m/\!/\beta$,当 $m\subset\beta$ 时,由 $m/\!/n$,$n\not\subset\beta$,结合直线与平面平行的判定定理得 $n/\!/\beta$,当 $m/\!/\beta$ 时,设过 m 的平面 γ 与平面 β 相交于 a,则 $m/\!/a$,又 $m/\!/n$,$n\not\subset\beta$,所以 $n/\!/a$,又 $a\subset\beta$,所以 $n/\!/\beta$,故 D 中说法正确.故选 B.

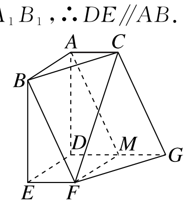
3. C 【解析】易知①②③正确,故选 C.

4. B 【解析】当 $\alpha\cap\gamma=l$,$\beta\cap\gamma=m$,$l/\!/m$ 时,α,β 可能相交,故"$l/\!/m$"推不出"$\alpha/\!/\beta$".由 $\alpha\cap\gamma=l$,$\beta\cap\gamma=m$,$\alpha/\!/\beta$ 及平面与平面平行的性质定理知 $l/\!/m$,故"$\alpha/\!/\beta$"能推出"$l/\!/m$".故"$l/\!/m$"是"$\alpha/\!/\beta$"的必要不充分条件.故选 B.

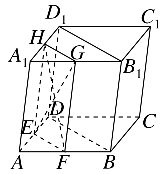
5. D 【解析】若 $m/\!/n$,则 α,β 可能平行,也可能相交,故 A 不正确;若 $\alpha/\!/\beta$,则 m,n 可能平行,也可能异面,故 B 不正确;若 m 与 n 不相交,则 α,β 可能平行,也可能相交,故 C 不正确;若 $\alpha/\!/\beta$,则 m,n 可能平行,也可能异面,故 m 与 n 不相交,故 D 正确.故选 D.

6. B 【解析】∵ 在三棱柱 ABC-$A_1B_1C_1$ 中,$AB/\!/A_1B_1$,平面 $A_1B_1C_1/\!/$ 平面 ABC,平面 $ABC\cap$ 平面 $A_1B_1ED=DE$,平面 $A_1B_1C_1\cap$ 平面 $A_1B_1ED=A_1B_1$,∴ $DE/\!/A_1B_1$,∴ $DE/\!/AB$.

7. A 【解析】如图所示,取 DG 的中点 M,连接 AM,FM,∵ $EF/\!/DG$,$EF=\dfrac{1}{2}DG$,∴ $EF\underline{/\!/}DM$,∴ 四边形 $DEFM$ 是平行四边形,∴ $DE/\!/FM$ 且 $DE=FM$.∵ 平面 $ABC/\!/$ 平面 $DEFG$,平面 $ABC\cap$ 平面 $ADEB=AB$,平面 $DEFG\cap$ 平面 $ADEB=DE$,∴ $AB/\!/DE$,∴ $AB/\!/FM$.又 $AB=DE$,∴ $AB=FM$,∴ 四边形 $ABFM$ 是平行四边形,∴ $BF/\!/AM$.∵ $BF\not\subset$ 平面 $ACGD$,$AM\subset$ 平面 $ACGD$,∴ $BF/\!/$ 平面 $ACGD$,故 A 正确.∵ 无法判断点 C 的位置,∴ CF 不一定平行于平面 $ABED$,BC 不一定平行于 FG,故 B,C 错误.易知平面 $ABED$ 与平面 CGF 相交,故 D 错误.故选 A.



8. D 【解析】如图,设 AD,AB,A_1B_1,A_1D_1 的中点分别为 E,F,G,H,连接 EF,FG,GH,HE,EG,FH,易知 E,F,G,H 四点共面.因为 H,G 分别为 A_1D_1,A_1B_1 的中点,所以 $HG/\!/B_1D_1$.又 $HG\not\subset$ 平面 DBB_1D_1,$B_1D_1\subset$ 平面 DBB_1D_1,所以 $HG/\!/$ 平面 DBB_1D_1.同理 $EH/\!/$ 平面 DBB_1D_1.因为 $HG\cap EH=H$,所以平面 $EFGH/\!/$ 平面 DBB_1D_1,所以在平面 $EFGH$ 内,符合题意的直线有 EF,FG,GH,HE,EG,FH,共 6 条.同理,在平面 DBB_1D_1 的另一侧也有 6 条符合题意的直线,故共有 12 条符合题意的直线.故选 D.



9. A 【解析】连接 B_1D_1,BD,设 $B_1D_1\cap A_1C_1=M$,$BD\cap AC=O$,连接 ME,MD,B_1O.∵ 平面 $AB_1C/\!/$ 平面 A_1EC_1,平面 $AB_1C\cap$ 平面 $BDD_1B_1=B_1O$,平面 $A_1EC_1\cap$ 平面

$BDD_1B_1=ME$，$\therefore B_1O/\!/ME$. 易知四边形 B_1MDO 为平行四边形，$\therefore B_1O/\!/MD$，$\therefore$点 E 与点 D 重合.

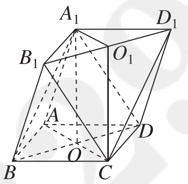
10. 平行 **［解析］** 由平面与平面平行的性质定理可得 $a/\!/b$.

11. $\frac{4\sqrt{3}}{9}$ **［解析］** 因为 AA'，BB' 相交于点 O，所以 AA'，BB' 确定的平面与平面 α，平面 β 的交线分别为 AB，$A'B'$，则 $AB/\!/A'B'$，故 $\frac{OA}{OA'}=\frac{OB}{OB'}=\frac{AB}{A'B'}=\frac{3}{2}$，同理可得 $AC/\!/A'C'$，$\frac{OA}{OA'}=\frac{AC}{A'C'}=\frac{3}{2}$，$BC/\!/B'C'$，$\frac{OB}{OB'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{3}{2}$，所以 $\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$，且 $\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle A'B'C'}}=\frac{9}{4}$，又 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot AC\sin\angle BAC=\frac{1}{2}\times2\times2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$，所以 $S_{\triangle A'B'C'}=\frac{4\sqrt{3}}{9}$.

12. $\frac{2\sqrt{2}}{3}a$ **［解析］** 连接 AC，A_1C_1. $\because$ 平面 $ABCD/\!/$平面 $A_1B_1C_1D_1$，平面 $PMNQ\cap$平面 $A_1B_1C_1D_1=MN$，平面 $PMNQ\cap$平面 $ABCD=PQ$，$\therefore MN/\!/PQ$. $\because M$，N 分别是 A_1B_1，B_1C_1 的中点，$\therefore MN/\!/A_1C_1/\!/AC$，$\therefore PQ/\!/AC$. 又 $AP=\frac{a}{3}$，正方体 $ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 a，$\therefore CQ=\frac{a}{3}$，从而 $DP=DQ=\frac{2a}{3}$，$\therefore PQ=\sqrt{DQ^2+DP^2}=\sqrt{\left(\frac{2a}{3}\right)^2+\left(\frac{2a}{3}\right)^2}=\frac{2\sqrt{2}}{3}a$.

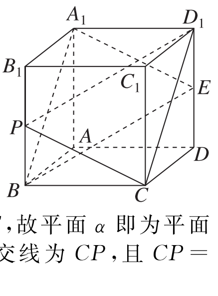
13. **证明：** 取 PF 的中点 M，连接 ME，MC. 因为 $PF=2FA$，所以 F 为 MA 的中点. 连接 AC，交 BD 于点 O，连接 OF. 因为四边形 $ABCD$ 是正方形，所以 O 为 AC 的中点. 又 F 为 MA 的中点，所以 $OF/\!/MC$. 因为 $OF\subset$平面 BDF，$MC\not\subset$平面 BDF，所以 $MC/\!/$平面 BDF. 因为 M，E 分别为 PF，PD 的中点，所以 $ME/\!/FD$，又 $ME\not\subset$平面 BDF，$FD\subset$平面 BDF，所以 $ME/\!/$平面 BDF. 因为 $MC\cap ME=M$，$MC\subset$平面 MCE，$ME\subset$平面 MCE，所以平面 $BDF/\!/$平面 MCE，又 $CE\subset$平面 MCE，所以 $CE/\!/$平面 BDF.

14. **证明：**(1)取 B_1D_1 的中点 O_1，连接 CO_1，A_1O_1，如图.

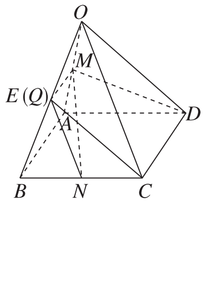


$\because$几何体 $ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$ 是四棱柱，
$\therefore A_1O_1\mathrel{\underline{/\!/}}OC$，
$\therefore$四边形 A_1OCO_1 为平行四边形，
$\therefore A_1O/\!/O_1C$，又 $O_1C\subset$平面 B_1CD_1，$A_1O\not\subset$平面 B_1CD_1，
$\therefore A_1O/\!/$平面 B_1CD_1.
(2)$\because BB_1\mathrel{\underline{/\!/}}DD_1$，$\therefore$四边形 BB_1D_1D 是平行四边形，
$\therefore BD/\!/B_1D_1$，$\because BD\not\subset$平面 B_1CD_1，$B_1D_1\subset$平面 B_1CD_1，
$\therefore BD/\!/$平面 B_1CD_1.
由(1)得 $A_1O/\!/$平面 B_1CD_1，又 $BD\cap A_1O=O$，BD，$A_1O\subset$平面 A_1BD，$\therefore$平面 $A_1BD/\!/$平面 B_1CD_1.
(3)$\because$平面 $A_1B_1D_1/\!/$平面 $ABCD$，平面 $B_1CD_1\cap$平面 $A_1B_1D_1=B_1D_1$，平面 $B_1CD_1\cap$平面 $ABCD=l$，$\therefore B_1D_1/\!/l$.

15. $\sqrt{5}$ **［解析］** 取 BB_1 的中点 P，连接 CP，PD_1，CD_1，如图所示. 因为 $CD_1/\!/A_1B$，$CD_1\not\subset$平面 A_1BE，$A_1B\subset$平面 A_1BE，所以 $CD_1/\!/$平面 A_1BE. 因为 $CP/\!/A_1E$，$CP\not\subset$平面 A_1BE，$A_1E\subset$平面 A_1BE，所以 $CP/\!/$平面 A_1BE，又因为 CP，$CD_1\subset$平面 CPD_1，$CP\cap CD_1=C$，所以平面 $CPD_1/\!/$平面 A_1BE，故平面 α 即为平面 CPD_1，故平面 α 与正方形 B_1BCC_1 的交线为 CP，且 $CP=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$.



16. **证明：**(1)取 OB 的中点 E，连接 EM，EN，如图.
因为 M，E 分别为 OA，OB 的中点，
所以 $EM/\!/AB$.
因为底面 $ABCD$ 是菱形，所以 $AB/\!/CD$，所以 $EM/\!/CD$，
又 $EM\not\subset$平面 OCD，$CD\subset$平面 OCD，

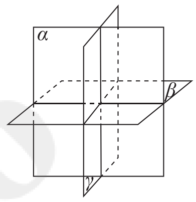


所以 $EM/\!/$平面 OCD.
因为 E，N 分别为 OB，BC 的中点，所以 $EN/\!/OC$，又 $EN\not\subset$平面 OCD，$OC\subset$平面 OCD，所以 $EN/\!/$平面 OCD，
又 $EM\cap EN=E$，EM，$EN\subset$平面 EMN，
所以平面 $EMN/\!/$平面 OCD，
又 $MN\subset$平面 EMN，所以 $MN/\!/$平面 OCD.
(2)因为过点 C，D，M 的平面与棱 OB 交于点 Q，所以 C，D，M，Q 共面. 连接 CQ，MQ，MD.
因为 $CD/\!/AB$，$AB\subset$平面 OAB，$CD\not\subset$平面 OAB，所以 $CD/\!/$平面 OAB，又平面 $CDMQ\cap$平面 $OAB=MQ$，$CD\subset$平面 $CDMQ$，所以 $CD/\!/MQ$，所以 $AB/\!/MQ$，
所以 Q 是 OB 的中点.

滚动习题（六）

1. B **［解析］** $\because AB/\!/PQ$，$BC/\!/QR$，且 $\angle ABC=60°$，$\therefore\angle PQR=60°$或 $120°$. 故选 B.

2. B **［解析］** 对于 A，如果两个平面有三个公共点，那么这两个平面可能相交或重合，故 A 错误；对于 B，若四点不共面，则其中任意三点不共线，故 B 正确；对于 C，空间中，相交于同一点的三条直线不一定在同一平面内，如三棱锥 P-ABC，相交于同一点 P 的三条直线 PA，PB，PC 不在同一平面内，故 C 错误；对于 D，如图，三个不重合的平面最多可将空间分成八个部分，故 D 错误. 故选 B.



3. D **［解析］** 由题意易得平面 α，β 可能平行，也可能相交，故选 D.

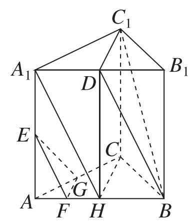
4. D **［解析］** 若 $m/\!/\alpha$，$n/\!/\alpha$，则 m，n 可能平行、相交或异面，故 A 错误；若 $m/\!/\alpha$，$m/\!/\beta$，则 $\alpha/\!/\beta$ 或 α，β 相交，故 B 错误；若 $m/\!/n$，$m/\!/\alpha$，则 $n/\!/\alpha$ 或 $n\subset\alpha$，故 C 错误；若 $\alpha/\!/\beta$，$m\subset\alpha$，则 $m/\!/\beta$，故 D 正确. 故选 D.

5. D **［解析］** 对于选项 A，连接 PS，QR，易证 $PS/\!/QR$，$\therefore P$，S，R，Q 四点共面；对于选项 B，过 P，S，R，Q 可作一个正六边形，$\therefore P$，S，R，Q 四点共面；对于选项 C，连接 PQ，RS，易证 $PQ/\!/RS$，$\therefore P$，Q，R，S 四点共面；对于选项 D，连接 PQ，RS，易知直线 PQ 与 RS 异面，$\therefore P$，Q，R，S 四点不共面. 故选 D.

6. D **［解析］** 取 A_1D_1 的中点 E，在 DD_1 上取点 F，使 $D_1F=2DF$，连接 EF，C_1E，C_1F，则易知平面 $CMN/\!/$平面 C_1EF. $\because P$ 是侧面 ADD_1A_1 内一动点(含边界)，$C_1P/\!/$平面 CMN，$\therefore P\in$线段 EF. $\because C_1E=\sqrt{C_1D_1^2+D_1E^2}=5$，$C_1F=\sqrt{C_1D_1^2+D_1F^2}=5$，$\therefore$当 P 与 EF 的中点重合时，线段 C_1P 的长度取得最小值，当 P 与点 E 或点 F 重合时，线段 C_1P 的长度取得最大值. 取 EF 的中点 O，连接 C_1O，则由题意知 $EF=4\sqrt{2}$，$C_1O=\sqrt{C_1E^2-EO^2}=\sqrt{25-(2\sqrt{2})^2}=\sqrt{17}$，$\therefore$线段 C_1P 的长度的取值范围是$[\sqrt{17},5]$. 故选 D.

7. AB **［解析］** 对于 A，若 $\alpha\cap\beta=$直线 l，点 $A\in\alpha$ 且点 $A\in\beta$，则 $A\in\alpha\cap\beta$，即 $A\in l$，故 A 正确；对于 B，若 $C\in\beta$，又 $A\in\beta$，$B\in\beta$，则 α 和 β 重合，不成立，故 B 正确；对于 C，若直线 $a\subset\alpha$，直线 $b\subset\beta$，则 a 与 b 为异面直线或 $a/\!/b$ 或 a，b 相交，故 C 错误；对于 D，若直线 a，b 是异面直线，直线 b，c 是异面直线，则直线 a，c 异面或 a，c 相交或 a，c 平行，故 D 错误. 故选 AB.

8. ABD **［解析］** 对于 A，因为 $EG\subset$平面 ACC_1A_1，$C_1\in$平面 ACC_1A_1 且 $C_1\notin EG$，$B\notin$平面 ACC_1A_1，所以 EG 与 BC_1 为异面直线，故 A 正确. 对于 B，几何体 Ω 的棱有 A_1D，A_1C_1，DC_1，A_1E，EG，EF，CC_1，C_1B，DB，FG，GC，CB，FB，共 13 条，故 B 正确. 对于 C，几何体 Ω 的顶点有 A_1，D，C_1，E，G，C，B，F，共 8 个，故 C 错误. 对于 D，如图，取 AB 的中点 H，连接 A_1H，DH，CH，因为 $AB=4AF$，所以 F 是 AH 的中点，又 D，G，E 分别为所在棱的中点，所以 $EF/\!/A_1H$，$FG/\!/CH$. 因为 $A_1D/\!/BH$，$A_1D=BH$，所以四边形 A_1DBH 为平行四边形，故 $A_1H/\!/DB$，则 $EF/\!/DB$，又 $EF\not\subset$平面 BDC_1，$DB\subset$平面 BDC_1，故 $EF/\!/$平面 BDC_1. 易证 $DH/\!/BB_1/\!/CC_1$，且 $DH=BB_1=CC_1$，故四边形 DC_1CH 为平行四边形，则 $C_1D/\!/CH$，故 $FG/\!/C_1D$，又 $FG\not\subset$



平面 BDC_1，$DC_1\subset$ 平面 BDC_1，故 $FG//$ 平面 BDC_1，又 $EF\cap FG=F$，所以平面 $EFG//$ 平面 BDC_1，故 D 正确. 故选 ABD.

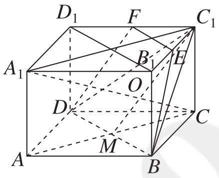
9. $\{0,1,2,3\}$ **[解析]** 三个平面可以互相平行，可以交于同一条直线，可以两个平面平行且被第三个平面所截，也可以两两相交，故 n 的取值集合为 $\{0,1,2,3\}$.

10. 1 无数 **[解析]** 过平面外一点作与该平面平行的平面，这样的平面有且只有 1 个. 过平面外一点作与该平面平行的直线，这样的直线有无数条，这些直线都在过该点且与所给平面平行的平面内.

11. ①③ **[解析]** 连接 PR，QS，因为 P，Q，R，S 分别是 C_1D_1，CC_1，A_1B_1，B_1B 的中点，所以 $PR//B_1C_1$，$QS//B_1C_1$，且 $PR=B_1C_1$，$QS=B_1C_1$，所以 $PR//QS$ 且 $PR=QS$，所以四边形 $PRSQ$ 是平行四边形，即 PQ 与 RS 共面，故①正确；连接 QN，C_1B，PM，则由题意得 $QN=\dfrac{1}{2}C_1B=\dfrac{1}{2}PM$，$QN//C_1B//PM$，所以四边形 $PQNM$ 为梯形，所以 PQ 与 MN 共面，故③正确；MN 与 RS 异面，故②错误. 故填①③.

12. $\dfrac{3}{7}$ **[解析]** 因为平面 A_1C_1ED 与 BB_1 平行，平面 $BCC_1B_1\cap$ 平面 $A_1C_1ED=C_1E$，平面 $ABB_1A_1\cap$ 平面 $A_1C_1ED=A_1D$，所以 $BB_1//C_1E$，$BB_1//A_1D$. 因为平面 $A_1B_1C_1//$ 平面 ABC，平面 $A_1B_1C_1\cap$ 平面 $A_1C_1ED=A_1C_1$，平面 $ABC\cap$ 平面 $A_1C_1ED=DE$，所以 $A_1C_1//DE$，故几何体 $A_1B_1C_1$-ABC 为三棱柱. 设该三棱柱的高为 h，则 $V_{A_1B_1C_1\text{-}DBE}=S_{\triangle BDE}\cdot h$. 因为 D，E 分别是 AB，BC 的中点，所以 $S_{\triangle ABC}=4S_{\triangle BDE}$，由台体的体积公式得 $V_{A_1B_1C_1\text{-}ABC}=\dfrac{1}{3}(S_{\triangle A_1B_1C_1}+S_{\triangle ABC}+\sqrt{S_{\triangle A_1B_1C_1}\cdot S_{\triangle ABC}})h=\dfrac{7}{3}S_{\triangle BDE}\cdot h$，故 $\dfrac{V_{A_1B_1C_1\text{-}DBE}}{V_{A_1B_1C_1\text{-}ABC}}=\dfrac{3}{7}$.

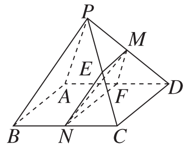
13. **证明：**(1) 如图，连接 EF，EB，DF，B_1D_1.



在长方体 $ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$ 中，易得 $B_1D_1//BD$.
$\because E$，F 分别是 B_1C_1 和 C_1D_1 的中点，$\therefore EF//B_1D_1$，$\therefore EF//BD$，
$\therefore$ E，F，D，B 四点共面.
(2) 连接 A_1C_1，C_1M. $\because AA_1//CC_1$，
$\therefore A$，A_1，C，C_1 确定一个平面 AA_1C_1C.
$\because O\in A_1C$，$A_1C\subset$ 平面 AA_1C_1C，$\therefore O\in$ 平面 AA_1C_1C.
$\because A_1C$ 与平面 BDC_1 交于点 O，$\therefore O\in$ 平面 BDC_1，
$\therefore O$ 在平面 AA_1C_1C 与平面 BDC_1 的交线上.
$\because AC\cap BD=M$，$AC\subset$ 平面 AA_1C_1C，$BD\subset$ 平面 BDC_1，
$\therefore M\in$ 平面 AA_1C_1C 且 $M\in$ 平面 BDC_1，又 $C_1\in$ 平面 AA_1C_1C，$C_1\in$ 平面 BDC_1，$\therefore$ 平面 $AA_1C_1C\cap$ 平面 $BDC_1=C_1M$，$\therefore O\in C_1M$，即点 C_1，O，M 共线.

14. **解：**(1) 证明：取 BE 的中点 Q，连接 NQ，MQ，$\because CB//DE$，N，Q 分别为 CD，BE 的中点，$\therefore NQ//DE$，又 $\because NQ\not\subset$ 平面 AED，$DE\subset$ 平面 AED，$\therefore NQ//$ 平面 AED. $\because M$，Q 分别为 BA，BE 的中点，$\therefore MQ//AE$，又 $\because MQ\not\subset$ 平面 AED，$AE\subset$ 平面 AED，$\therefore MQ//$ 平面 AED. $\because MQ\cap NQ=Q$，$MQ\subset$ 平面 MNQ，$NQ\subset$ 平面 MNQ，$\therefore$ 平面 $MNQ//$ 平面 AED，
又 $MN\subset$ 平面 MNQ，$\therefore MN//$ 平面 AED.
(2) 连接 BD，设 BD 交 CE 于点 G，连接 FG.
$\because AB//$ 平面 CEF，平面 $CEF\cap$ 平面 $ABD=FG$，$AB\subset$ 平面 ABD，$\therefore AB//FG$，$\therefore \dfrac{AF}{FD}=\dfrac{BG}{GD}$. 在直角梯形 $BCDE$ 中，$\triangle BCG\backsim\triangle DEG$，$\therefore \dfrac{BG}{GD}=\dfrac{BC}{DE}=\dfrac{1}{3}$，$\therefore \dfrac{AF}{FD}=\dfrac{BG}{GD}=\dfrac{1}{3}$，
$\therefore AD=4AF$，$\therefore \lambda=4$.

15. **解：**(1) 证明：取 AD 的中点 H，连接 NH，MH，
因为 M，H 分别为 PD，AD 的中点，所以 $MH//PA$，
又因为 $MH\not\subset$ 平面 PAB，$PA\subset$ 平面 PAB，所以 $MH//$ 平面 PAB. 由题意知四边形 $ABCD$ 为平行四边形.
因为 H，N 分别为 AD，BC 的中点，所以 $NH//AB$，
又因为 $NH\not\subset$ 平面 PAB，$AB\subset$ 平面 PAB，所以 $NH//$ 平面 PAB. 因为 $MH\cap NH=H$，且 MH，$NH\subset$ 平面 MNH，所以平面 $MNH//$ 平面 PAB，
又因为 $MN\subset$ 平面 MNH，所以 $MN//$ 平面 PAB.
(2) 当 E，F 分别为 PC，AD 的中点时，平面 $EMFN//$ 平面 PAB.



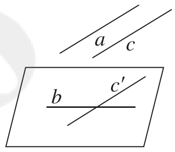
证明如下：如图，连接 ME，NE，MF，NF，在 $\triangle PCD$ 中，因为 M，E 分别为 PD，PC 的中点，所以 $ME//CD$，
因为 F，N 分别为 AD，BC 的中点，所以 $NF//CD$，
所以 $ME//NF$，所以点 E，M，F，N 四点共面，
由(1)知平面 $MNF//$ 平面 PAB，即平面 $EMFN//$ 平面 PAB，即过直线 MN 作一平面与平面 PAB 平行，且分别交 PC，AD 于点 E，F，此时 E，F 分别为 PC，AD 的中点.

8.6 空间直线、平面的垂直

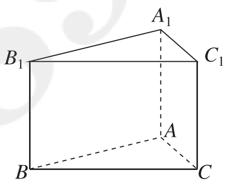
8.6.1 直线与直线垂直

1. C **[解析]** 根据异面直线的概念可得，θ 的取值范围是 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right]$，故选 C.

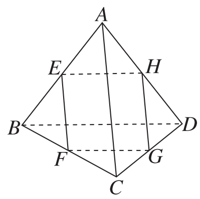
2. A **[解析]** 在直线 b 上取一点作 $c'//c$，如图. 因为 $c//a$，所以 $c'//a$，则相交直线 b，c' 所成的角就是异面直线 a，b 所成的角，所以相交直线 b，c' 所成的角为 50°，所以 b 与 c 所成的角是 50°.



3. B **[解析]** 如图，直三棱柱 ABC-$A_1B_1C_1$ 中，$AB\perp AC$，则在该直三棱柱的所有棱中，与 AC 垂直且异面的有 A_1B_1 和 BB_1，共 2 条. 故选 B.

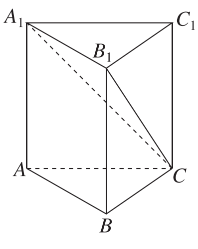


4. B **[解析]** 如图，易知四边形 $EFGH$ 为平行四边形. $\because E$，F 分别为 AB，BC 的中点，$\therefore EF//AC$. 同理可得 $FG//BD$，$\therefore\angle EFG$ 或其补角为 AC 与 BD 所成的角. $\because AC$ 与 BD 所成的角为 90°，$\therefore\angle EFG=90^\circ$，故四边形 $EFGH$ 为矩形.

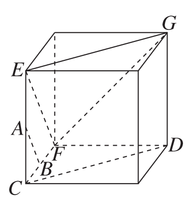


5. B **[解析]** 因为 $\angle CBC_1=\dfrac{\pi}{4}$，所以 BC 与直线 BC_1 所成的角为 $\dfrac{\pi}{4}$，又 $BC//AD//A_1D_1//B_1C_1$，所以 AD，A_1D_1，B_1C_1 与直线 BC_1 所成的角为 $\dfrac{\pi}{4}$. 同理可得 BB_1，CC_1，DD_1，AA_1 与直线 BC_1 所成的角为 $\dfrac{\pi}{4}$. 又 AB，CD，C_1D_1，A_1B_1 与直线 BC_1 所成的角为 $\dfrac{\pi}{2}$，所以与直线 BC_1 所成的角为 $\dfrac{\pi}{4}$ 的棱有 8 条. 故选 B.

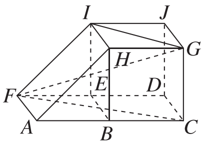
6. C **[解析]** 如图所示，连接 B_1C. $\because A_1B_1//AB$，$\therefore\angle B_1A_1C$ 或其补角即为异面直线 A_1C 与 AB 所成的角. $\because$ 在直三棱柱 ABC-$A_1B_1C_1$ 中，$AC\perp BC$，$AA_1=AC=BC=1$，$\therefore A_1C=\sqrt{2}$，$B_1C=\sqrt{2}$，$AB=A_1B_1=\sqrt{2}$. 在 $\triangle B_1A_1C$ 中，$\because A_1B_1=A_1C=B_1C=\sqrt{2}$，$\therefore\triangle B_1A_1C$ 是正三角形，$\therefore\angle B_1A_1C=\dfrac{\pi}{3}$. 故选 C.



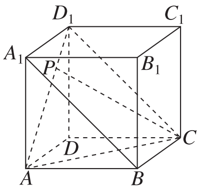
7. C **[解析]** 将展开图还原为正方体，如图，其中 EG，EF，FG 分别为所在面的对角线. 因为 A，B 分别为相应棱的中点，所以 $EF//AB$，易知 $CD//EG$，所以 $\angle FEG$ 或其补角为 AB 与 CD 所成的角，又因为 $EG=EF=FG$，所以 $\angle FEG=60^\circ$，即 AB 与 CD 所成角的大小是 60°. 故选 C.



8. B 【解析】如图,连接 FC,FG,易知 $AH/\!/FI$,所以$\angle FIG$ 或其补角为直线 AH 与直线 IG 所成的角.设 $BC=1$,则 $IG=\sqrt{2}$,$FC=\sqrt{5}$,$FI=\sqrt{2}$,$CG=1$.在 $\mathrm{Rt}\triangle FCG$ 中,$FG=\sqrt{FC^2+CG^2}=\sqrt{5+1}=\sqrt{6}$.在$\triangle FIG$ 中,由余弦定理得 $\cos\angle FIG=\dfrac{FI^2+IG^2-FG^2}{2FI\cdot IG}=\dfrac{2+2-6}{2\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=-\dfrac{1}{2}$,又$\angle FIG\in(0,\pi)$,所以$\angle FIG=\dfrac{2\pi}{3}$,又直线 AH 与直线 IG 所成角的取值范围为$\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right]$,所以直线 AH 与直线 IG 所成的角为$\dfrac{\pi}{3}$.



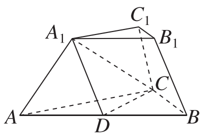
9. D 【解析】如图,连接 CD_1,AC.易知 $CD_1/\!/BA_1$,所以$\angle D_1CP$ 或其补角即为 CP 与 BA_1 所成的角,又易知$\angle D_1CP$ 始终是锐角,所以 $\theta=\angle D_1CP$.当点 P 从点 D_1 向点 A 运动时,$\angle D_1CP$ 从 $0°$增大到 $60°$,但当点 P 与 D_1 重合时,$CP/\!/BA_1$,此时 CP 与 BA_1 不是异面直线,不符合题意,所以异面直线 CP 与 BA_1 所成的角 θ 的取值范围是 $0°<\theta\leqslant 60°$.故选 D.



10. 8 【解析】与 AB 垂直的棱有 AA_1,BB_1,CC_1,DD_1,AD,BC,A_1D_1,B_1C_1,共 8 条.

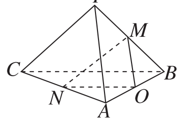
11. $75°$或 $15°$ 【解析】连接 AC,取 AC 的中点 G,连接 GE 与 GF,∵异面直线 AB 与 CD 所成的角为 $30°$,且 $EG/\!/AB$,$FG/\!/CD$,∴$\angle EGF=30°$或$\angle EGF=150°$.∵$EG/\!/AB$,∴$\angle GEF$ 为异面直线 AB 与 EF 所成的角.由 $AB=CD$,得 $GE=GF$,∴$\angle GEF=75°$或$\angle GEF=15°$,∴EF 与 AB 所成的角是 $75°$或 $15°$.

12. $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$ 【解析】如图,取 AB 的中点 D,连接 A_1D,CD.因为 $A_1B_1/\!/DB$ 且 $A_1B_1=DB$,所以四边形 A_1B_1BD 为平行四边形,所以 $A_1D/\!/BB_1$,则$\angle CA_1D$(或其补角)即为异面直线 A_1C 与 BB_1 所成的角.因为 $AA_1=A_1B_1=\dfrac{1}{2}AB=BB_1=2$,所以平行四边形 A_1B_1BD 为菱形,又 $AD=DB=2$,所以$\triangle ADA_1$ 为等边三角形,所以$\angle A_1AB=60°$,所以$\angle A_1AC=60°$,在$\triangle A_1AC$ 中,由余弦定理得 $A_1C=\sqrt{AC^2+A_1A^2-2A_1A\cdot AC\cos\angle A_1AC}=\sqrt{4^2+2^2-2\times2\times4\times\dfrac{1}{2}}=2\sqrt{3}$.又 $CD=\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3}$,$A_1D=2$,所以在$\triangle CA_1D$ 中,由余弦定理得 $\cos\angle CA_1D=\dfrac{2^2+(2\sqrt{3})^2-(2\sqrt{3})^2}{2\times2\times2\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$,则异面直线 A_1C 与 BB_1 所成角的余弦值为$\dfrac{\sqrt{3}}{6}$.



13. 解:(1)在该棱锥的 6 条棱所在的直线中,共有 3 对异面直线,分别是 PA 与 BC,PB 与 AC,PC 与 AB.

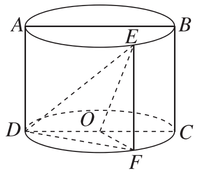
(2)如图,取 AB 的中点 O,连接 OM,ON,因为 PB 的中点为 M,AC 的中点为 N,所以 $OM/\!/PA$,$ON/\!/BC$,所以异面直线 PA 与 BC 所成的角为$\angle MON$ 或其补角.因为 $PA=4$,$BC=6$,所以 $OM=2$,$ON=3$,又 $MN=4$,所以在$\triangle MON$ 中,由余弦定理可得 $\cos\angle MON=\dfrac{OM^2+ON^2-MN^2}{2OM\cdot ON}=\dfrac{4+9-16}{2\times2\times3}=-\dfrac{1}{4}$,所以异面直线 PA 与 BC 所成的角的余弦值为$\dfrac{1}{4}$.



14. 解:如图,设底面圆心为 O,则 O 为 CD 的中点,过点 E 作 $EF/\!/BC$,交圆 O 于 F,

连接 OE,OF,DF,∵$BC/\!/EF$,$\angle DEF$ 为锐角,

∴$\angle DEF$ 为异面直线 DE 与 BC 所成的角,∴$\angle DEF=\dfrac{\pi}{4}$.

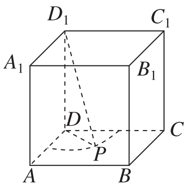


∵点 E 为上底面圆弧 $\overset{\frown}{AB}$ 的中点,∴点 F 为下底面圆弧 $\overset{\frown}{DC}$ 的中点,∴$CD\perp OF$,∴$DF=\sqrt{OD^2+OF^2}=2$,

又 $EF\perp DF$,$\angle DEF=\dfrac{\pi}{4}$,∴$EF=2$,

则圆柱的表面积 $S=2\pi\times\sqrt{2}EF+2\pi\times(\sqrt{2})^2=4(\sqrt{2}+1)\pi$.

15. $\dfrac{\pi}{12}$ 【解析】由题意知 $DD_1/\!/CC_1$,要使 D_1P 与直线 CC_1 所成角的大小为$\dfrac{\pi}{6}$,只需 D_1P 与直线 DD_1 所成角的大小为$\dfrac{\pi}{6}$,∴$\angle DD_1P=\dfrac{\pi}{6}$,又 $DD_1=1$,$DD_1\perp DP$,∴$DP=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.如图所示,P 的轨迹是以 D 为圆心,$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$为半径的四分之一圆,∴线段 DP 扫过的面积为$\dfrac{1}{4}\times\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^2\times\pi=\dfrac{\pi}{12}$.



16. 解:如图①所示,AE 与中线 BF 为异面直线.

连接 DE,取 DE 的中点 G,连接 FG,BG,则 $GF/\!/AE$,所以$\angle BFG$ 或其补角是异面直线 AE 与 BF 所成的角.

又 $GF=\dfrac{\sqrt{3}}{4}a$,$BF=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$,$BG=\sqrt{\left(\dfrac{a}{2}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{3}}{4}a\right)^2}=\dfrac{\sqrt{7}}{4}a$,

则 $\cos\angle BFG=\dfrac{\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{3}}{4}a\right)^2-\left(\dfrac{\sqrt{7}}{4}a\right)^2}{2\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}a\times\dfrac{\sqrt{3}}{4}a}=\dfrac{2}{3}$,

所以异面直线 AE 与 BF 所成角的余弦值为$\dfrac{2}{3}$.

如图②所示,AE 与中线 DH 为异面直线.

取 BE 的中点 I,连接 HI,DI,DE,则 $HI/\!/AE$,所以$\angle IHD$ 或其补角是异面直线 AE 与 DH 所成的角.

又 $DH=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$,$HI=\dfrac{\sqrt{3}}{4}a$,

$DI=\sqrt{DE^2+EI^2}=\sqrt{\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2+\left(\dfrac{1}{4}a\right)^2}=\dfrac{\sqrt{13}}{4}a$,

则 $\cos\angle IHD=\dfrac{\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{3}}{4}a\right)^2-\left(\dfrac{\sqrt{13}}{4}a\right)^2}{2\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}a\times\dfrac{\sqrt{3}}{4}a}=\dfrac{1}{6}$,

所以异面直线 AE 与 DH 所成角的余弦值为$\dfrac{1}{6}$.

如图③所示,AE 与中线 CJ 为异面直线.

取 BJ 的中点 K,连接 EK,AK,AJ,则 $EK/\!/CJ$,所以$\angle AEK$ 或其补角是异面直线 AE 和 CJ 所成的角.

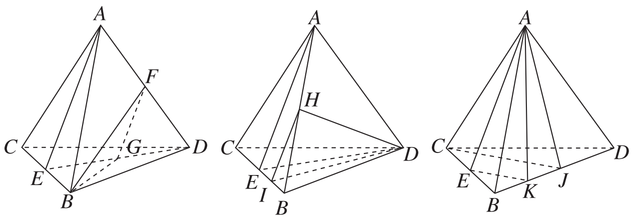
又 $AE=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$,$EK=\dfrac{\sqrt{3}}{4}a$,$AK=\sqrt{AJ^2+KJ^2}=\dfrac{\sqrt{13}}{4}a$,

则 $\cos\angle AEK=\dfrac{\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{3}}{4}a\right)^2-\left(\dfrac{\sqrt{13}}{4}a\right)^2}{2\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}a\times\dfrac{\sqrt{3}}{4}a}=\dfrac{1}{6}$,

所以异面直线 AE 与 CJ 所成角的余弦值为$\dfrac{1}{6}$.

同理,易知其他与 AE 异面的中线与 AE 所成角的余弦值也为$\dfrac{1}{6}$或$\dfrac{2}{3}$.

综上,与 AE 异面的三角形中线与 AE 所成角的余弦值为$\dfrac{1}{6}$或$\dfrac{2}{3}$.

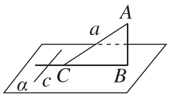


① ② ③

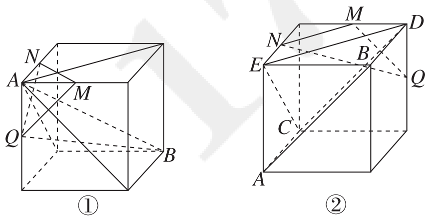
8.6.2 直线与平面垂直

第 1 课时 直线与平面垂直的判定

1. C 【解析】$\because OA\perp OB, OA\perp OC$,且 $OB\cap OC=O$,$\therefore OA\perp$平面 OBC. 故选 C.
2. B 【解析】若 $l\perp\alpha, m\subset\alpha$,则 $l\perp m$ 一定成立,即必要性成立. 若 $l\perp m, m\subset\alpha$,则 $l\perp\alpha$ 不一定成立,只有当 l 垂直于平面 α 内的两条相交直线时,该结论才成立,故充分性不成立. 综上所述,"$l\perp m$"是"$l\perp\alpha$"的必要不充分条件. 故选 B.
3. C 【解析】当 $a\subset\alpha$ 时,易知 α 内与 a 垂直的直线有无数条. 当 $a\not\subset\alpha$ 时,如图,a 不与 α 垂直,A 是 a 上一点,C 是 a 与 α 的交点,$AB\perp\alpha, B\in\alpha, c\subset\alpha$,故 $AB\perp c$,若 $c\perp BC$,因为 $AB\cap BC=B$,所以 $c\perp$平面 ABC,又 $a\subset$平面 ABC,所以 $c\perp a$,故在平面 α 内与 c 平行的直线均与 a 垂直,这样的直线有无数条. 故选 C.

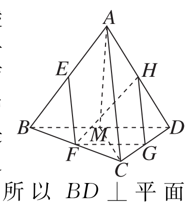


4. D 【解析】易知 $A_1B_1\perp$平面 ADD_1A_1,$\therefore A_1B_1\perp AD_1$,又 $AD_1\perp A_1D$,$A_1D\cap A_1B_1=A_1$,$\therefore AD_1\perp$平面 A_1DB_1. 故选 D.
5. B 【解析】$\because PB\perp\alpha, AC\subset\alpha$,$\therefore PB\perp AC$. $\because PC\perp AC$,$PB\cap PC=P$,$\therefore AC\perp$平面 PBC,又 $BC\subset$平面 PBC,$\therefore AC\perp BC$,故$\triangle ABC$ 为直角三角形. 故选 B.
6. A 【解析】$\because C$ 是底面圆周上异于 A,B 的任意一点,且 AB 是底面圆 O 的直径,$\therefore BC\perp AC$. $\because AA'\perp$平面 ABC,$BC\subset$平面 ABC,$\therefore AA'\perp BC$,又 $AA'\cap AC=A$,$AA'\subset$平面 $A'AC$,$AC\subset$平面 $A'AC$,$\therefore BC\perp$平面 $A'AC$. 故选 A.
7. D 【解析】对于 A,AB 为体对角线,M,N,Q 分别为所在棱的中点,由中位线定理可得,MN,MQ,NQ 分别平行于所在面的一条对角线,连接它们所在面的另一条对角线,如图①,连接 BQ,易得 $MN\perp$平面 ABQ,故 $AB\perp MN$,同理得 $AB\perp MQ$,$AB\perp NQ$,又 $MN\cap MQ=M$,故 $AB\perp$平面 MNQ,故 A 中直线 AB 与平面 MNQ 垂直;对于 B,$AB\perp MN$,$AB\perp MQ$,$\because MN\cap MQ=M$,$\therefore AB\perp$平面 MNQ,故 B 中直线 AB 与平面 MNQ 垂直;对于 C,$AB\perp MN$,$AB\perp MQ$,$\because MN\cap MQ=M$,$\therefore AB\perp$平面 MNQ,故 C 中直线 AB 与平面 MNQ 垂直;对于 D,如图②,$\triangle CDE$ 为等边三角形,易得 AB 与 MN 所成的角为 $60°$,$\therefore$直线 AB 与平面 MNQ 不垂直,故 D 中直线 AB 与平面 MNQ 不垂直. 故选 D.

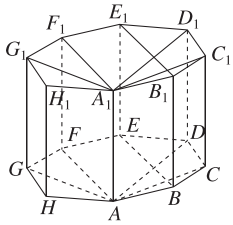


① ②

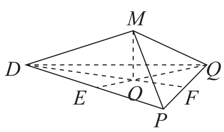
8. CD 【解析】由线面垂直的判定定理知,若直线 l 与平面 α 内的两条相交直线垂直,则 $l\perp\alpha$,故 C 正确;由线面垂直的定义知,若直线 l 与平面 α 内的任意一条直线都垂直,则 $l\perp\alpha$,故 D 正确;易知 A,B 错误. 故选 CD.
9. ABC 【解析】对于 A,因为 E,F 分别为棱 AB,BC 的中点,所以 $EF/\!/AC$,又 $AC\subset$平面 ACD,$EF\not\subset$平面 ACD,所以 $EF/\!/$平面 ACD,故 A 正确;对于 B,如图,取 BD 的中点 M,连接 AM,CM,因为四面体 $ABCD$ 是正四面体,所以 $AM\perp BD$,$CM\perp BD$,又 $AM\cap CM=M$,$AM,CM\subset$平面 AMC,所以 $BD\perp$平面 AMC,又 $AC\subset$平面 AMC,所以 $AC\perp BD$,故 B 正确;对于 C,因为 G,H 分别是 CD,AD 的中点,所以 $HG/\!/AC$,又 $EF/\!/AC$,所以 $HG/\!/EF$,则 E,F,G,H 四点共面,故 C 正确;对于 D,由上知 $EF/\!/AC$,又$\triangle ABC$ 是等边三角形,所以 AB 与 AC 不垂直,故 AB 与 EF 不垂直,若 $AB\perp$平面 FGH,由上知 $EF\subset$平面 FGH,则 $AB\perp EF$,与已知不符,故 D 错误. 故选 ABC.



10. 垂直 【解析】由题意知 $AB\perp BC$,$AB\perp BE$,且 $BC\subset$平面 α,$BE\subset$平面 α,又 $BC\cap BE=B$,所以 $AB\perp$平面 α.
11. a 与 b 相交 【解析】由线面垂直的判定定理可知,另外添加的条件是"a 与 b 相交".
12. 连接 C_1E,在平面 $A_1B_1C_1D_1$ 中画出经过点 E 与 C_1E 垂直的直线 【解析】设经过点 E 在上底面所画与 CE 垂直的直线为 l,在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中,易知 $CC_1\perp$平面 $A_1B_1C_1D_1$,又 $l\subset$平面 $A_1B_1C_1D_1$,所以 $CC_1\perp l$,连接 C_1E,因为 $CE\perp l$,CC_1,CE 是平面 CC_1E 内的两条相交直线,所以 $l\perp$平面 CC_1E,又 $C_1E\subset$平面 CC_1E,所以 $l\perp C_1E$,所以在平面 $A_1B_1C_1D_1$ 中画出经过点 E 与 C_1E 垂直的直线即可.
13. **证明:**因为 $SA=SC$,D 为 AC 的中点,所以 $SD\perp AC$.
在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中,易知 $AD=DC=BD$,
又 $SA=SB$,$SD=SD$,所以$\triangle ADS\cong\triangle BDS$,
所以$\angle BDS=\angle ADS=90°$,即 $SD\perp BD$.
又 $AC\cap BD=D$,$AC,BD\subset$平面 ABC,
所以 $SD\perp$平面 ABC.
14. **证明:**$\because$四边形 $ABCD$ 是正方形,$\therefore AC\perp BO$.
$\because B_1B\perp$平面 $ABCD$,$AC\subset$平面 $ABCD$,$\therefore BB_1\perp AC$.
$\because EF$ 是$\triangle ABC$ 的中位线,
$\therefore EF/\!/AC$,$\therefore EF\perp BB_1$,$EF\perp BO$,又 $BB_1\cap BO=B$,BB_1,$BO\subset$平面 BB_1O,$\therefore EF\perp$平面 BB_1O.
15. C 【解析】如图,连接 A_1C_1,A_1D_1,A_1F_1,A_1G_1,B_1E_1,AC,AD,AF,AG,BE. 根据题意可得,该正八棱柱的底面边长都相等,且底面的每个内角都为 $135°$,$\angle HAG=\angle BAC=22.5°$,$\angle HAF=\angle BAD=45°$,所以 $AB\perp AF$,$AC\perp AG$,$AD\perp AH$,又因为 $AA_1\perp$平面 $ABCDEFGH$,所以 $AA_1\perp AF$,又 $AA_1\cap AB=A$,所以 $AF\perp$平面 AA_1B_1B,又因为 $AF/\!/A_1F_1/\!/BE/\!/B_1E_1$,所以以矩形 A_1ABB_1 为底面的阳马有 4 个;同理,$AG\perp$平面 AA_1C_1C,以矩形 AA_1C_1C 为底面的阳马有 4 个;$AH\perp$平面 AA_1D_1D,以矩形 AA_1D_1D 为底面的阳马有 4 个;$AB\perp$平面 AA_1F_1F,以矩形 AA_1F_1F 为底面的阳马有 4 个;$AC\perp$平面 AA_1G_1G,以矩形 AA_1G_1G 为底面的阳马有 4 个;$AD\perp$平面 AA_1H_1H,以矩形 AA_1H_1H 为底面的阳马有 4 个. 故共有 24 个阳马. 故选 C.



16. **证明:**(1)因为在正方形 $ABCD$ 中,$AP\perp AD$,$CD\perp CQ$,
所以可得 $MP\perp MD$,$MD\perp MQ$,
又 $MP\cap MQ=M$,$MP,MQ\subset$平面 MPQ,
所以 $MD\perp$平面 MPQ.
(2)如图,设点 M 在平面 PDQ 内的射影为 O,连接 MO,则 $MO\perp$平面 PDQ,又 $PD\subset$平面 PDQ,
所以 $MO\perp PD$.
连接 DO 并延长,与 PQ 交于点 F,连接 QO 并延长,与 PD 交于点 E.



因为在正方形 $ABCD$ 中,$BP\perp BQ$,所以可得 $MP\perp MQ$,
又 $MD\perp MQ$,$MD\cap MP=M$,$MD,MP\subset$平面 MPD,所以 $MQ\perp$平面 MPD,又 $PD\subset$平面 MPD,所以 $MQ\perp PD$.
因为 $MQ\cap MO=M$,$MQ,MO\subset$平面 MOQ,
所以 $PD\perp$平面 MOQ,
又 $QE\subset$平面 MOQ,所以 $QE\perp DP$,同理可得 $PQ\perp DF$,
故点 M 在平面 PDQ 内的射影为$\triangle PDQ$ 的垂心.

第 2 课时 线面角、直线与平面垂直的性质

1. B 【解析】若两条直线平行,则它们与同一个平面所成的角

相等.因为直线 a 与平面 α 所成的角为 $50°$,直线 $b/\!/a$,所以直线 b 与平面 α 所成的角为 $50°$.故选 B.

2. B 【解析】一条直线和三角形的两边同时垂直,根据直线与平面垂直的判定定理可知,该直线垂直于三角形所在平面,则根据线面垂直的性质可知,这条直线和三角形的第三边的位置关系是垂直.

3. B 【解析】因为 $B_1B\perp$平面 $A_1B_1C_1D_1$,$l\perp$平面 $A_1B_1C_1D_1$,所以 $l/\!/B_1B$.

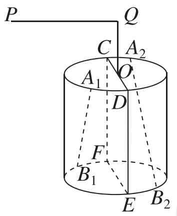
4. B 【解析】与已知直线垂直的不同平面都互相平行,其中过空间一定点且与已知直线垂直的平面有且只有 1 个.故选 B.

5. B 【解析】①当直尺所在直线与地面垂直时,地面上的所有直线都与直尺所在直线垂直,则地面上存在直线与直尺所在直线垂直;②当直尺所在直线与地面相交但不垂直时,直尺所在的直线必在地面上有一条射影,在地面上一定存在与此射影垂直的直线,易知与射影垂直的直线一定与此斜线垂直,则地面上总有直线与直尺所在的直线垂直;③当直尺所在直线与地面平行或在地面内时,易知地面上一定存在直线与直尺所在直线垂直.综上,直尺无论怎样放置,地面上总有与直尺所在直线垂直的直线.故选 B.

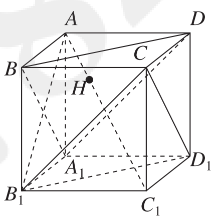
6. B 【解析】当在这个平面内经过斜足的直线 l 与这条直线在这个平面内的射影垂直时,直线 l 与这条直线垂直,所成的角为直角.因为两直线所成的角的取值范围为$[0°,90°]$,所以这条直线与这个平面内经过斜足的直线所成的角中最大的角为 $90°$.故选 B.

7. B 【解析】连接 AC.当 $MA\perp BD$ 时,因为 $MC\perp$平面 $ABCD$,$BD\subset$平面 $ABCD$,所以 $MC\perp BD$,又 $MA\cap MC=M$,$MA,MC\subset$平面 MAC,所以 $BD\perp$平面 MAC,又 $AC\subset$平面 MAC,所以 $BD\perp AC$,所以四边形 $ABCD$ 为菱形;反之,当四边形 $ABCD$ 为菱形时,可得 $AC\perp BD$,因为 $MC\perp$平面 $ABCD$,$BD\subset$平面 $ABCD$,所以 $MC\perp BD$,又 $AC\cap MC=C$,$AC,MC\subset$平面 MAC,所以 $BD\perp$平面 MAC,又 $MA\subset$平面 MAC,所以 $MA\perp BD$.故选 B.

8. A 【解析】如图,作出平面 $CDEF$,使得 $PQ\perp$平面 $CDEF$,当 $PQ\perp AB$ 时,$AB/\!/$平面 $CDEF$ 或 $AB\subset$平面 $CDEF$,结合旋转分析可知,有 2 次使得 $PQ\perp AB$.故选 A.



9. ABC 【解析】对于 A,在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中,可得$\triangle A_1BD$ 为等边三角形,且 $AB=AA_1=AD$,所以三棱锥 $A\text{-}A_1BD$ 是正三棱锥,所以点 A 在$\triangle A_1BD$ 内的射影 H 是$\triangle A_1BD$ 的垂心,故 A 正确;对于 B,在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中,可得 $BD/\!/B_1D_1$,$A_1D/\!/B_1C$,又因为 $BD\not\subset$平面 CB_1D_1,



$B_1D_1\subset$平面 CB_1D_1,所以 $BD/\!/$平面 CB_1D_1,同理 $A_1D/\!/$平面 CB_1D_1,又因为 $BD\cap A_1D=D$,$BD,A_1D\subset$平面 A_1BD,所以平面 $A_1BD/\!/$平面 CB_1D_1,又因为 $AH\perp$平面 A_1BD,所以 $AH\perp$平面 CB_1D_1,故 B 正确;对于 C,如图,连接 AB_1,AC_1,在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中,可得 $A_1B\perp AB_1$,又由 $B_1C_1\perp$平面 ABB_1A_1,且 $A_1B\subset$平面 ABB_1A_1,可得 $A_1B\perp B_1C_1$,又 $AB_1\cap B_1C_1=B_1$,$AB_1,B_1C_1\subset$平面 AB_1C_1,所以 $A_1B\perp$平面 AB_1C_1,又 $AC_1\subset$平面 AB_1C_1,所以 $AC_1\perp A_1B$,同理可得 $AC_1\perp BD$,又 $A_1B\cap BD=B$,$A_1B,BD\subset$平面 A_1BD,所以 $AC_1\perp$平面 A_1BD,所以 AH 的延长线经过点 C_1,故 C 正确;对于 D,因为 $AH\perp$平面 A_1BD,所以 AH 与平面 A_1BD 所成的角为 $90°$,故 D 错误.故选 ABC.

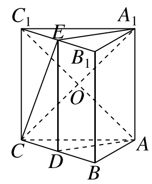
10. $\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$ 【解析】斜线 l 与平面 α 所成的角是$\frac{\pi}{4}$,则直线 l 与平面 α 内所有直线所成的角中最小的角为$\frac{\pi}{4}$,显然最大的角为$\frac{\pi}{2}$,所以所求取值范围为$\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$.

11. 充要 【解析】因为 $PO\perp\alpha$,$a\subset\alpha$,所以 $PO\perp a$.当直线 $a\perp$直线 OA 时,因为 $PO,OA\subset$平面 POA,$PO\cap OA=O$,所以 $a\perp$平面 POA,又 $PA\subset$平面 POA,所以直线 $a\perp$直线 PA,充分性成立;当直线 $a\perp$直线 PA 时,因为 $PO,PA\subset$平面 POA,$PO\cap PA=P$,所以 $a\perp$平面 POA,又 $OA\subset$平面 POA,所以直线 $a\perp$直线 OA,必要性成立.故"直线 $a\perp$直线 OA"是"直线 $a\perp$直线 PA"的充要条件.

12. 外 【解析】连接 OA,OB,OC.因为 O 为 P 在平面 ABC 上的射影,所以 $PO\perp$平面 ABC,又 $OA,OB,OC\subset$平面 ABC,所以 $PO\perp OA$,$PO\perp OB$,$PO\perp OC$,即$\angle POA=\angle POB=\angle POC=\frac{\pi}{2}$.因为 $PO\perp$平面 ABC,所以$\angle PAO$,$\angle PBO$,$\angle PCO$ 分别为 PA,PB,PC 与平面 ABC 所成的角.由已知可得$\angle PAO=\angle PBO=\angle PCO$,又 $PO=PO=PO$,所以$\triangle PAO\cong\triangle PBO\cong\triangle PCO$,所以 $OA=OB=OC$,所以 O 是$\triangle ABC$ 的外心.

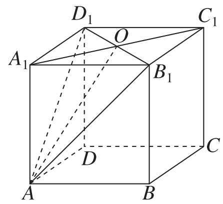
13. **证明**:$\because PA\perp$平面 ABD,$PC\perp$平面 BCD,$BD\subset$平面 ABD,$BD,EF\subset$平面 BCD,$\therefore PA\perp BD$,$PC\perp BD$,$PC\perp EF$.又 $PA\cap PC=P$,$PA,PC\subset$平面 PAC,$\therefore BD\perp$平面 PAC.$\because EF\perp AC$,$PC\cap AC=C$,$PC,AC\subset$平面 PAC,$\therefore EF\perp$平面 PAC,$\therefore EF/\!/BD$,$\therefore\frac{CF}{DC}=\frac{CE}{BC}$.

14. **解**:(1)证明:因为 $AB=BC=AC=AA_1$,D 是 BC 的中点,所以 $AD\perp BC$,
又 $AA_1\perp$平面 ABC,$AA_1/\!/CC_1$,所以 $CC_1\perp$平面 ABC,
又 $AD\subset$平面 ABC,所以 $CC_1\perp AD$,
又 $BC\cap CC_1=C$,$BC,CC_1\subset$平面 BCC_1B_1,
所以 $AD\perp$平面 BCC_1B_1.
(2)如图,取 B_1C_1 的中点 E,连接 A_1E,CE,DE,

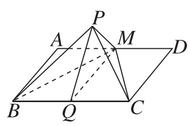


则 $DE/\!/BB_1$ 且 $DE=BB_1$,
又 $AA_1/\!/BB_1$ 且 $AA_1=BB_1$,
所以 $DE/\!/AA_1$ 且 $DE=AA_1$,
所以四边形 $EDAA_1$ 为平行四边形,
所以 $AD/\!/A_1E$,又 $AD\perp$平面 BCC_1B_1,
所以 $A_1E\perp$平面 BCC_1B_1,
所以$\angle A_1CE$ 为直线 A_1C 与平面 BCC_1B_1 所成的角.
因为 $A_1E\perp$平面 BCC_1B_1,$CE\subset$平面 BCC_1B_1,
所以 $A_1E\perp CE$,
设 $AB=BC=AC=AA_1=2$,则 $A_1E=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$,
$A_1C=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$,
所以 $\sin\angle A_1CE=\frac{A_1E}{A_1C}=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}}{4}$,则直线 A_1C 与平面 BCC_1B_1 所成角的正弦值为$\frac{\sqrt{6}}{4}$.

15. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 【解析】如图所示,在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中,连接 AB_1,B_1D_1,AD_1,因为棱 A_1A,A_1B_1,A_1D_1 与平面 AB_1D_1 所成的角相等,所以平面 AB_1D_1 就是与正方体的 12 条棱所成的角均为 θ 的一个平面.连接 A_1C_1,交 B_1D_1 于点 O,连接 AO,则$\angle A_1AO=\theta$.设该正方体的棱长为 1,则 $A_1O=\frac{\sqrt{2}}{2}$,$AO=\frac{\sqrt{6}}{2}$,则 $\sin\theta=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{6}}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.



16. **解**:(1)证明:由题可得 $BP=AB=1$,$CP=CD=1$.
如图,取 BC 的中点 Q,连接 PQ,MQ,
$\because BP=CP=1$,$BM=CM=\frac{\sqrt{6}}{2}$,Q 为 BC 的中点,$\therefore BC\perp PQ$,$BC\perp MQ$,



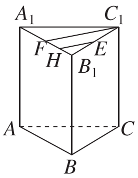
又 $MQ\subset$ 平面 PMQ，$PQ\subset$ 平面 PMQ，$MQ\cap PQ=Q$，
$\therefore BC\perp$ 平面 PMQ，又 $PM\subset$ 平面 PMQ，$\therefore BC\perp PM$.
(2)$\because BP=CP=1$，$BC=AD=\sqrt{2}$，
$\therefore PB^2+PC^2=BC^2$，$\therefore PB\perp PC$.
$\because$ 四边形 $ABCD$ 为矩形，$\therefore AB\perp AM$，即 $PB\perp PM$，
又 $PM\cap PC=P$，$PM\subset$ 平面 PMC，$PC\subset$ 平面 PMC，
$\therefore PB\perp$ 平面 PMC，$\therefore \angle BCP$ 为直线 BC 与平面 PMC 所成的角.
$\because \sin\angle BCP=\dfrac{BP}{BC}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$\therefore$ 直线 BC 与平面 PMC 所成角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

第 3 课时　空间距离与线面垂直的综合问题

1. B **【解析】** 若点在平面 α 与平面 β 之间，则点的集合为 1 个平面；若点不在平面 α 与平面 β 之间，则点的集合也为 1 个平面. 故满足题意的点的集合为 2 个平面. 故选 B.

2. A **【解析】** 对于 A，若 $m\perp\alpha$，$n\subset\alpha$，则 $m\perp n$，故 A 正确；对于 B，若 $m/\!/\alpha$，$n/\!/\alpha$，则 m，n 平行、相交或异面，故 B 错误；对于 C，若 $m\perp\alpha$，$m\perp n$，则 $n\subset\alpha$ 或 $n/\!/\alpha$，故 C 错误；对于 D，若 $m/\!/\alpha$，$m\perp n$，则 $n\subset\alpha$ 或 $n/\!/\alpha$ 或 n 与 α 相交，故 D 错误. 故选 A.

3. A **【解析】** 如图，取 A_1B_1 的中点 F，连接 C_1F，易得 $C_1F\perp$ 平面 ABB_1A_1. 设 FB_1 的中点为 H，连接 EH，则 $EH/\!/C_1F$，$\therefore EH\perp$ 平面 ABB_1A_1，$\therefore E$ 到平面 ABB_1A_1 的距离为 $EH=\dfrac{1}{2}C_1F=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. 故选 A.



4. C **【解析】** 因为四边形 $ABCD$ 是菱形，所以 $BD\perp AC$. 因为 $MC\perp$ 平面 $ABCD$，$BD\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $BD\perp MC$. 因为 $AC\cap MC=C$，AC，$MC\subset$ 平面 AMC，所以 $BD\perp$ 平面 AMC，又 $MA\subset$ 平面 AMC，所以 $MA\perp BD$. 显然直线 MA 与直线 BD 不相交. 故选 C.

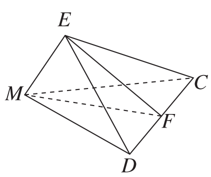
5. B **【解析】** 在正方体 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$ 中，平面 $ABCD/\!/$ 平面 $A'B'C'D'$，又 $AA'\perp$ 平面 $A'B'C'D'$，当两平面平行时，一个平面内的任意一点到另一个平面的距离相等，所以点 P 到平面 $A'B'C'D'$ 的距离等于棱长 2. 故选 B.

6. C **【解析】** 连接 BD. 由题意知四边形 $ABCD$ 为正方形，$\therefore AC\perp BD$. $\because DD_1\perp$ 平面 $ABCD$，$AC\subset$ 平面 $ABCD$，$\therefore AC\perp DD_1$. 又 $BD\cap DD_1=D$，$\therefore AC\perp$ 平面 BDD_1. $\because BD_1\subset$ 平面 BDD_1，$\therefore AC\perp BD_1$. 故选 C.

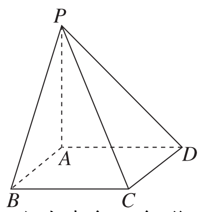
7. B **【解析】** 在 $\triangle ABC$ 中，$\because BC=3$，$AC=4$，$AC\perp BC$，$\therefore AB=\sqrt{3^2+4^2}=5$. 过 C 作 $CM\perp AB$，交 AB 于 M，连接 PM，$\because PC\perp$ 平面 ABC，$\therefore PC\perp AB$，又 $CM\perp AB$，$PC\cap CM=C$，$\therefore AB\perp$ 平面 PCM，$\therefore PM\perp AB$，$\therefore$ 点 P 到直线 AB 的距离为线段 PM 的长. 由 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}AC\cdot BC=\dfrac{1}{2}AB\cdot CM$，得 $CM=\dfrac{AC\cdot BC}{AB}=\dfrac{4\times3}{5}=\dfrac{12}{5}$，则 $PM=\sqrt{PC^2+CM^2}=\sqrt{\dfrac{81}{25}+\dfrac{144}{25}}=3$，$\therefore$ 点 P 到直线 AB 的距离为 3. 故选 B.

8. A **【解析】** 由 $AB\perp\alpha$，$CD\perp\alpha$，$EF\subset\alpha$，得 $AB\perp EF$，$CD\perp EF$，$AB/\!/CD$. 显然 $BD\subset$ 平面 $ABDC$，但由 EF 垂直于平面 $ABDC$ 内的两条平行直线不能推出 EF 垂直于平面 $ABDC$，进而不能推出 EF 垂直于 BD，所以增加的条件只要能推出 EF 垂直于平面 $ABDC$ 内与 AB(或 CD)相交的一条直线即可. 若 $AC\perp\beta$，因为 $EF\subset\beta$，所以 $AC\perp EF$，又 $AC\cap AB=A$，所以 $EF\perp$ 平面 $ABDC$，又 $BD\subset$ 平面 $ABDC$，所以 $EF\perp BD$. 故选 A.

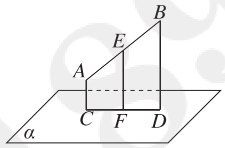
9. B **【解析】** 在三棱锥 $E\text{-}MCD$ 中，设 F 为 CD 的中点，连接 EF，MF，如图. 易知 $MC=MD$，$EC=ED$，则 $EF\perp CD$，$MF\perp CD$，又 EF，$MF\subset$ 平面 MEF，$EF\cap MF=F$，所以 $CD\perp$ 平面 MEF. 设正方形 $ABCD$ 的边长为 $2a$，则有 $EC=ED=CD=2a$，$EF=\sqrt{3}a$，$MC=MD=\sqrt{5}a$，$MF=2a$，$ME=a$，所以 $MF^2=ME^2+EF^2$，则 $ME\perp EF$，所以 $S_{\triangle MEF}=\dfrac{1}{2}ME\cdot EF=\dfrac{\sqrt{3}a^2}{2}$，则 $V_{E\text{-}MCD}=\dfrac{1}{3}S_{\triangle MEF}\cdot CD=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{\sqrt{3}a^2}{2}\times2a=\dfrac{\sqrt{3}a^3}{3}=576\sqrt{3}$，得 $a^3=1728$，即 $a=12$，所以原正方形铁皮的边长是 24 cm. 故选 B.



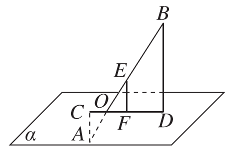
10. 4 **【解析】** 如图，在四棱锥 $P\text{-}ABCD$ 中，侧棱 $PA\perp$ 平面 $ABCD$，可得 $PA\perp AD$，$PA\perp AB$，所以 $\triangle PAD$，$\triangle PAB$ 均为直角三角形. 因为四边形 $ABCD$ 是矩形，所以 $AB\perp BC$，结合 $PA\perp BC$，$PA\cap AB=A$，可得 $BC\perp$ 平面 PAB，又因为 $PB\subset$ 平面 PAB，所以 $BC\perp PB$，所以 $\triangle PBC$ 为直角三角形，同理，$\triangle PCD$ 也为直角三角形，故该四棱锥的 4 个侧面中直角三角形的个数是 4.



11. d 或 $2d$ **【解析】** 作 $AC\perp\alpha$，$BD\perp\alpha$，垂足分别为 C，D，则 $AC/\!/BD$，连接 CD，设 AB，CD 的中点分别为 E，F，连接 EF. 如图①，当点 A，B 在平面 α 的同侧时，四边形 $ACDB$ 为梯形，则 $EF=\dfrac{1}{2}(AC+BD)=2d$；如图②，当 A，B 在平面 α 的异侧时，记 $AB\cap\alpha=O$，因为 $AC/\!/BD$，$\dfrac{AC}{BD}=\dfrac{d}{3d}=\dfrac{1}{3}$，所以 $\dfrac{OA}{OB}=\dfrac{1}{3}$，又 E 为 AB 的中点，所以 $\dfrac{OE}{OB}=\dfrac{EF}{BD}=\dfrac{1}{3}$，所以 $EF=d$. 综上，AB 的中点到平面 α 的距离为 d 或 $2d$.



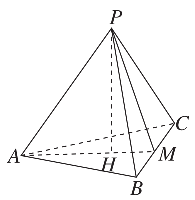
①



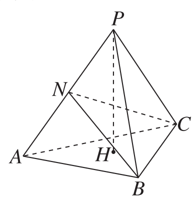
②

12. $A_1C_1\perp B_1C_1$ **【解析】** 当底面 $A_1B_1C_1$ 满足条件 $A_1C_1\perp B_1C_1$ 时，有 $AB_1\perp BC_1$. 证明如下：连接 B_1C，$\because AA_1\perp$ 平面 ABC，$BC=CC_1$，$\therefore$ 四边形 BCC_1B_1 是正方形，$\therefore BC_1\perp B_1C$. $\because A_1C_1\perp C_1C$，$A_1C_1\perp B_1C_1$，$CC_1\cap B_1C_1=C_1$，$CC_1$，$B_1C_1\subset$ 平面 BCC_1B_1，$\therefore A_1C_1\perp$ 平面 BCC_1B_1，又 $AC/\!/A_1C_1$，$\therefore AC\perp$ 平面 BCC_1B_1. $\because BC_1\subset$ 平面 BCC_1B_1，$\therefore BC_1\perp AC$，又 $AC\cap B_1C=C$，AC，$B_1C\subset$ 平面 ACB_1，$\therefore BC_1\perp$ 平面 ACB_1，$\therefore BC_1\perp AB_1$.

13. **证明：**(1)如图①，连接 AH 并延长，交 BC 于 M，连接 PM，
$\because$ 点 H 为 $\triangle ABC$ 的垂心，$\therefore AM\perp BC$.
$\because PH\perp$ 平面 ABC，$BC\subset$ 平面 ABC，$\therefore BC\perp PH$，
又 $PH\cap AM=H$，PH，$AM\subset$ 平面 PAM，$\therefore BC\perp$ 平面 PAM. $\because AP\subset$ 平面 PAM，$\therefore AP\perp BC$，
又 $AP\perp PC$，$PC\cap BC=C$，$\therefore AP\perp$ 平面 PBC.
$\because PB\subset$ 平面 PBC，$\therefore AP\perp PB$.
(2)如图②，取 AP 的中点 N，连接 BN，CN，
由(1)可得 $AP\perp BC$. $\because PB=AB$，N 为 AP 的中点，
$\therefore AP\perp BN$，又 $BN\cap BC=B$，BN，$BC\subset$ 平面 BCN，
$\therefore AP\perp$ 平面 BCN，又 $CN\subset$ 平面 BCN，$\therefore AP\perp CN$.
在 $\triangle ACP$ 中，$\because N$ 为 AP 的中点，$CN\perp AP$，$\therefore CA=CP$.

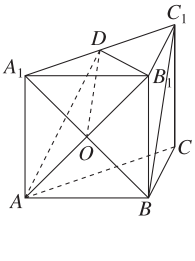


①



②

14. **解：**(1)证明：因为 O 为 A_1B 与 AB_1 的交点，四边形 ABB_1A_1 为正方形，所以 O 为 A_1B 的中点.
如图，连接 OD，因为 O，D 分别为 A_1B，A_1C_1 的中点，所以 $OD/\!/BC_1$，又 $OD\subset$ 平面 AB_1D，$BC_1\not\subset$ 平面 AB_1D，
所以 $BC_1/\!/$ 平面 AB_1D.
(2)由题意得 $A_1B_1=B_1C_1=1$，



$\angle A_1B_1C_1=\angle ABC=90^\circ$,所以$\triangle A_1B_1C_1$是等腰直角三角形,则$A_1C_1=\sqrt{2}A_1B_1=\sqrt{2}$,$A_1D=\frac{1}{2}A_1C_1=\frac{\sqrt{2}}{2}$,

又$AA_1=1$,所以$AD=\sqrt{AA_1^2+A_1D^2}=\sqrt{1^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{6}}{2}$,又$B_1D=\frac{\sqrt{2}}{2}$,$AB_1=\sqrt{2}$,所以$AD^2+B_1D^2=AB_1^2$,即$AD\perp B_1D$,所以$S_{\triangle ADB_1}=\frac{1}{2}B_1D\cdot AD=\frac{\sqrt{3}}{4}$.

由$S_{\triangle A_1DB_1}=\frac{1}{2}B_1D\cdot A_1D=\frac{1}{4}$,得$V_{A\text{-}A_1DB_1}=\frac{1}{3}AA_1\cdot S_{\triangle A_1DB_1}=\frac{1}{12}$,

又$V_{A\text{-}A_1DB_1}=V_{A_1\text{-}ADB_1}$,设$A_1$到平面$ADB_1$的距离为$d$,

所以$\frac{1}{3}d\cdot S_{\triangle ADB_1}=\frac{1}{12}$,可得$d=\frac{\sqrt{3}}{3}$,即点$A_1$到平面$AB_1D$的距离为$\frac{\sqrt{3}}{3}$.

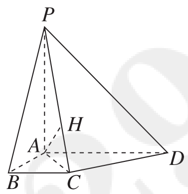
15. B 【解析】连接B_1D_1,B_1D,在正方体$ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$中,易得$B_1D\perp$平面ACD_1,因为$MN\perp$平面ACD_1,所以$B_1D/\!/MN$或B_1D与MN重合,所以B_1D与MN共面.因为B_1,M,D都在平面BDD_1B_1内,所以点N在平面BDD_1B_1内,又点N在平面$A_1B_1C_1D_1$内,平面$A_1B_1C_1D_1\cap$平面$BDD_1B_1=B_1D_1$,所以点N在B_1D_1上,则点N到点A距离的最小值为A到B_1D_1的距离.连接AB_1,因为$\triangle AB_1D_1$是边长为$\sqrt{2}$的等边三角形,所以点N到点A距离的最小值为$\frac{\sqrt{3}}{2}\times\sqrt{2}=\frac{\sqrt{6}}{2}$.故选B.

16. **解**:(1)证明:由题意可得$DC=AC=\sqrt{2}$,所以$AC^2+DC^2=AD^2$,即$AC\perp DC$.因为$PA\perp$底面$ABCD$,所以$PA\perp DC$,又因为$PA\cap AC=A$,所以$DC\perp$平面PAC.

(2)当$PH=\frac{2}{3}PC$时,$AH\perp$平面PCD.

理由如下:

过点A作$AH\perp PC$,垂足为H,如图,由(1)可得$CD\perp AH$,又$PC\cap CD=C$,所以$AH\perp$平面PCD.



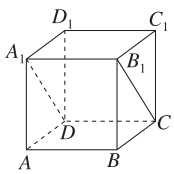
在$\text{Rt}\triangle PAC$中,$PA=2$,$AC=\sqrt{2}$,则$PC=\sqrt{6}$.由$\cos\angle APH=\frac{PH}{PA}=\frac{PA}{PC}$,可得$PH=\frac{2\sqrt{6}}{3}$,则$PH=\frac{2}{3}PC$,即在棱$PC$上存在点$H$,且$PH=\frac{2}{3}PC$,使得$AH\perp$平面$PCD$.

8.6.3 平面与平面垂直

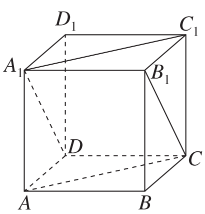
第1课时 平面与平面垂直的判定

1. C 【解析】由面面垂直的判定定理知,任何过l的平面都垂直于平面α,所以这样的平面有无数个.故选C.

2. D 【解析】如图所示,在正方体$ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$中,平面A_1B_1CD内的一条直线A_1B_1垂直于平面$ABCD$内的一条直线BC,但平面A_1B_1CD与平面$ABCD$显然不垂直.故选D.

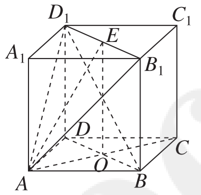


3. C 【解析】如图,在正方体$ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$中,$BB_1\perp$平面$ABCD$,$BB_1\perp C_1D_1$,$C_1D_1/\!/$平面DCB_1A_1,但是平面$ABCD$与平面DCB_1A_1不垂直,A错误;平面ABB_1A_1与平面AA_1C_1C都垂直于平面$ABCD$,但它们之间不垂直,B错误;若$\alpha/\!/\beta$,则α与β没有公共点,又$m\subset\alpha$,所以m与平面β也没有公共点,所以$m/\!/\beta$,C正确;$AA_1\perp$平面$ABCD$,平面$ABCD/\!/$平面$A_1B_1C_1D_1$,$DD_1\perp$平面$A_1B_1C_1D_1$,但AA_1与DD_1不垂直,D错误.故选C.

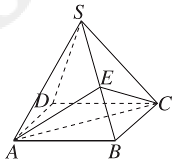


4. A 【解析】当$l/\!/m$时,结合$l\perp\alpha$,可得$m\perp\alpha$,又$m\subset\beta$,所以$\alpha\perp\beta$;当$\alpha\perp\beta$,$l\perp\alpha$,$m\subset\beta$时,l与m不一定平行.故"$l/\!/m$"是"$\alpha\perp\beta$"的充分不必要条件.故选A.

5. A 【解析】如图,设B_1D_1的中点为E,连接AC,BD,设$AC\cap BD=O$,连接AE,OE,易得$\angle AEO$是二面角$A\text{-}B_1D_1\text{-}B$的平面角.因为正方体的棱长为1,所以$B_1D_1=B_1A=AD_1=\sqrt{2}$,所以$AE=\frac{\sqrt{6}}{2}$.又$OE=BB_1=1$,$OE\perp AO$,所以$\cos\angle AEO=\frac{OE}{AE}=\frac{\sqrt{6}}{3}$,即二面角$A\text{-}B_1D_1\text{-}B$的余弦值为$\frac{\sqrt{6}}{3}$,故选A.



6. B 【解析】如图所示,在正四棱锥$S\text{-}ABCD$中,连接AC,作AE垂直于SB,垂足为E,连接CE,易知$CE\perp SB$,则$\angle AEC$为二面角$A\text{-}SB\text{-}C$的平面角θ.由题意知$AE<AB$,$CE<CB$.在正方形$ABCD$中,由勾股定理得$AC^2=AB^2+CB^2$,$\therefore AC^2>AE^2+CE^2$.在$\triangle AEC$中,由余弦定理得$\cos\theta=\cos\angle AEC=\frac{AE^2+CE^2-AC^2}{2AE\cdot CE}<0$,$\therefore\theta\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$,则$\theta$一定是钝角.故选B.



7. B 【解析】由题意知$AC\perp BC$.因为AD与圆柱的底面垂直,BC在圆柱的上底面上,所以$AD\perp BC$.又$AC\cap AD=A$,所以$BC\perp$平面ACD.因为$BC\subset$平面BCD,所以平面$BCD\perp$平面ACD.故选B.

8. AB 【解析】对于A,如果$m\perp n$,$m\perp\alpha$,$n\perp\beta$,那么由面面垂直的判定定理得$\alpha\perp\beta$,故A正确;对于B,如果$m\subset\alpha$,$\alpha/\!/\beta$,那么由面面平行的性质得$m/\!/\beta$,故B正确;对于C,如果$\alpha\cap\beta=l$,$m/\!/\alpha$,那么m与l平行或异面,故C错误;对于D,如果$m\perp n$,$m\perp\alpha$,$n/\!/\beta$,那么α与β不一定垂直,故D错误.故选AB.

9. AC 【解析】因为$PD=AD=\sqrt{AE^2+DE^2}=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$,所以在$\triangle PDC$中,可得$PD^2+CD^2=PC^2$,所以$PD\perp CD$.又$CD\perp DE$,$PD\cap DE=D$,所以$CD\perp$平面$PED$,又$CD\subset$平面$EBCD$,所以平面$PED\perp$平面$EBCD$,故A选项正确;假设$PC\perp ED$,则由$ED\perp CD$,$PC\cap CD=C$,可得$ED\perp$平面$PDC$,则$ED\perp PD$,而$\angle EDP=\angle EDA$,不符合题意,故假设不成立,故B选项错误;易知二面角$P\text{-}DC\text{-}B$的平面角为$\angle PDE$,根据题意知$\angle PDE=\angle ADE=\frac{\pi}{4}$,故C选项正确;由上面分析可知,$\angle CPD$为直线$PC$与平面$PED$所成的角,在$\text{Rt}\triangle PCD$中,$\tan\angle CPD=\frac{CD}{PD}=\frac{\sqrt{2}}{2}$,故D选项错误.故选AC.

10. 如果一个平面过另一个平面的垂线,那么这两个平面垂直 $a\subset\alpha$,$a\perp\beta\Rightarrow\alpha\perp\beta$

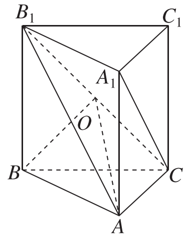
11. $l\perp\beta$ 【解析】由面面垂直的判定定理知,两个不重合的平面α,β,若直线$l\subset\alpha$,则当$l\perp\beta$时,可得到$\alpha\perp\beta$.

12. 垂直 【解析】因为$AB=BC$,$AD=CD$,E是AC的中点,所以$BE\perp AC$,$DE\perp AC$,又$BE\cap DE=E$,$BE\subset$平面BDE,$DE\subset$平面BDE,所以$AC\perp$平面BDE.因为$AC\subset$平面ADC,所以平面$ADC\perp$平面BDE.

13. **证明**:因为$SA\perp$底面$ABCD$,$CD\subset$平面$ABCD$,
所以$CD\perp SA$.
因为底面$ABCD$是正方形,所以$CD\perp AD$,
又SA,$AD\subset$平面SAD,$SA\cap AD=A$,
所以$CD\perp$平面SAD,

又 $AM\subset$平面 SAD，所以 $AM\perp CD$.
由题知 $SA=AD$，因为 M 是 SD 的中点，所以 $AM\perp SD$，
又 $CD,SD\subset$平面 SCD，$CD\cap SD=D$，
所以 $AM\perp$平面 SCD，
又 $SC\subset$平面 SCD，所以 $SC\perp AM$.
因为 $SC\perp AN$，且 $AM,AN\subset$平面 AMN，$AM\cap AN=A$，
所以 $SC\perp$平面 AMN，又 $SC\subset$平面 SAC，
所以平面 $SAC\perp$平面 AMN.

14. 解：(1)证明：因为四边形 B_1BCC_1 为正方形，且 $BB_1=1$，所以 $BC=1$，
又因为 $AB=1$，$AC=\sqrt{2}$，所以 $AB^2+BC^2=AC^2$，
所以 $AB\perp BC$，又易知 $AB\perp BB_1$，$BB_1\cap BC=B$，且 BB_1，$BC\subset$平面 B_1BCC_1，
所以 $AB\perp$平面 B_1BCC_1.
因为 $A_1B_1/\!/AB$，所以 $A_1B_1\perp$平面 B_1BCC_1，
又 $A_1B_1\subset$平面 A_1B_1C，
所以平面 $A_1B_1C\perp$平面 B_1BCC_1.

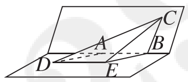


(2)由题意得 $AB_1=AC=B_1C$，所以 $\triangle AB_1C$ 为等边三角形.
如图，取 B_1C 的中点 O，连接 AO，BO，则 $AO\perp B_1C$，$BO\perp B_1C$，
所以 $\angle AOB$ 为二面角 $A\text{-}B_1C\text{-}B$ 的平面角.
在等腰直角三角形 BB_1C 中，$BO=\frac{1}{2}B_1C=\frac{\sqrt{2}}{2}$，
在等边三角形 AB_1C 中，$AO=\frac{\sqrt{3}}{2}AC=\frac{\sqrt{6}}{2}$，
所以在 $\triangle AOB$ 中，$\cos\angle AOB=\frac{AO^2+BO^2-AB^2}{2AO\cdot BO}=$

$$\frac{\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-1^2}{2\times\frac{\sqrt{6}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{3},$$

所以二面角 $A\text{-}B_1C\text{-}B$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

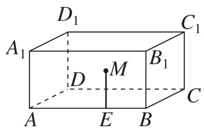
15. $\frac{3\pi}{4}$ 【解析】如图，过点 B 作 $BE/\!/AD$ 且 $BE=AD$，连接 DE，CE. 因为 $AD\perp AB$，所以四边形 $ABED$ 是矩形，所以 $BE\perp AB$，又 $BC\perp AB$，所以 $\angle CBE$ 是所求二面角的平面角. 因为 $DE/\!/AB$，$BC\perp AB$，所以 $BC\perp DE$，又 $BE\perp DE$，$BC\cap BE=B$，BC，$BE\subset$平面 BCE，所以 $DE\perp$平面 BCE，又 $CE\subset$平面 BCE，所以 $DE\perp CE$. 因为 $DE=AB=5$ m，所以 $CE=\sqrt{DC^2-DE^2}=\sqrt{(5\sqrt{6})^2-5^2}=5\sqrt{5}$(m)，又 $BE=AD=5\sqrt{2}$ m，$BC=5$ m，所以 $\cos\angle CBE=\frac{BC^2+BE^2-CE^2}{2BC\cdot BE}=\frac{25+50-125}{2\times5\times5\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以 $\angle CBE=\frac{3\pi}{4}$，故水库底面与水坝斜面所成的二面角的大小为 $\frac{3\pi}{4}$.



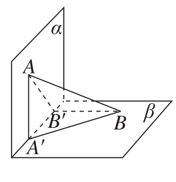
16. 解：(1)证明：因为 $PE\perp ED$，$PE\perp EB$，$EB\cap ED=E$，
所以 $PE\perp$平面 $EBCD$，
又 $BC\subset$平面 $EBCD$，所以 $PE\perp BC$.
因为 $BC\perp EB$，$EB\cap PE=E$，
所以 $BC\perp$平面 PEB，
又 $EM\subset$平面 PEB，所以 $BC\perp EM$.
因为 $PE=EB$，$PM=MB$，所以 $EM\perp PB$，
又 $BC\cap PB=B$，所以 $EM\perp$平面 PBC.
因为 $EM\subset$平面 EMN，
所以平面 $EMN\perp$平面 PBC.
(2)假设存在点 N 满足题意，过 M 作 $MQ\perp EB$ 于 Q，
因为 $PE\perp EB$，所以 $PE/\!/MQ$，
由(1)知 $PE\perp$平面 $EBCD$，所以 $MQ\perp$平面 $EBCD$，
又 $EN\subset$平面 $EBCD$，所以 $MQ\perp EN$.
过 Q 作 $QR\perp EN$ 于 R，连接 MR，
因为 $MQ\cap QR=Q$，所以 $EN\perp$平面 MQR，
又 $MR\subset$平面 MQR，所以 $EN\perp MR$，
所以 $\angle MRQ$ 为二面角 $B\text{-}EN\text{-}M$ 的平面角.
不妨设 $PE=EB=BC=2$，则 $MQ=1$，
在 $\mathrm{Rt}\triangle EBN$ 中，设 $BN=x(0<x<2)$，
因为 $\mathrm{Rt}\triangle EBN\backsim\mathrm{Rt}\triangle ERQ$，所以 $\frac{BN}{RQ}=\frac{EN}{EQ}$，
所以 $\frac{x}{RQ}=\frac{\sqrt{2^2+x^2}}{1}$，得 $RQ=\frac{x}{\sqrt{4+x^2}}$，
所以 $\tan\angle MRQ=\frac{MQ}{RQ}=\frac{\sqrt{x^2+4}}{x}=\sqrt{5}$，可得 $x=1$，此时 N 为 BC 的中点.
综上，存在点 N，使得二面角 $B\text{-}EN\text{-}M$ 的正切值为 $\sqrt{5}$，此时 N 为 BC 的中点.

第 2 课时　平面与平面垂直的性质

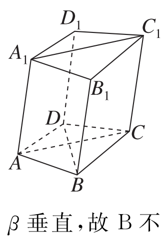
1. C 【解析】当两个平面垂直时，在一个平面内只有垂直于交线的直线才垂直于另一个平面.
2. C 【解析】对于 A，平面 $\alpha\perp$平面 γ，平面 $\beta\perp$平面 γ，$\alpha\cap\beta=l$，则 $l\perp\gamma$，A 中说法正确；对于 B，平面 $\alpha\perp$平面 β，不妨设 $\alpha\cap\beta=a$，作直线 $b/\!/a$，且 $b\subset\alpha$，则 $b/\!/\beta$，B 中说法正确；对于 C，所作垂线不一定在平面 α 内，则该垂线不一定垂直于 β，C 中说法错误；对于 D，假设平面 α 内存在直线垂直于平面 β，则平面 α 垂直于平面 β，这与已知平面 α 与平面 β 不垂直矛盾，所以假设不成立，D 中说法正确. 故选 C.
3. A 【解析】如图，$\because M\in$平面 ABB_1A_1，$E\in AB$，即 $E\in$平面 ABB_1A_1，$\therefore ME\subset$平面 ABB_1A_1，又平面 $ABB_1A_1\perp$平面 $ABCD$，平面 $ABB_1A_1\cap$平面 $ABCD=AB$，$ME\perp AB$，$\therefore ME\perp$平面 $ABCD$. 故选 A.



4. A 【解析】对于 A，若 $\alpha\cap\beta=b$，$a\subset\alpha$，则 a 与 β 可能相交，也可能平行，故 A 是假命题；对于 B，由 $a\perp\alpha$，$a\perp\beta$ 得 $\alpha/\!/\beta$，又 $b\subset\alpha$，所以 $b/\!/\beta$，故 B 是真命题；对于 C，由 $\alpha\perp\beta$，$a\perp\alpha$，得 $a/\!/\beta$ 或 $a\subset\beta$，又 $b\perp\beta$，所以 $a\perp b$，故 C 是真命题；对于 D，由 $\alpha/\!/\beta$，$a\perp\alpha$，得 $a\perp\beta$，又 $b/\!/\beta$，所以 $a\perp b$，故 D 是真命题. 故选 A.
5. A 【解析】如图所示，连接 AB'，$A'B$，则由已知得 $AA'\perp$平面 β，$\angle ABA'=\frac{\pi}{6}$，$BB'\perp$平面 α，$\angle BAB'=\frac{\pi}{4}$. 设 $AB=a$，则 $BA'=\frac{\sqrt{3}}{2}a$，$BB'=\frac{\sqrt{2}}{2}a$，则在 $\mathrm{Rt}\triangle BA'B'$ 中，可得 $A'B'=\frac{1}{2}a$，所以 $AB:A'B'=2:1$.



6. B 【解析】若 $BC\perp AB$，因为平面 $ABB_1A_1\perp$平面 ABC，平面 $ABB_1A_1\cap$平面 $ABC=AB$，且 $BC\subset$平面 ABC，所以由面面垂直的性质定理可得 $BC\perp$平面 ABB_1A_1，又 $BB_1\subset$平面 ABB_1A_1，所以 $BC\perp BB_1$，所以“$BC\perp BB_1$”是“$BC\perp AB$”的必要条件；若三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 是直三棱柱，底面 ABC 是正三角形，则 $BB_1\perp$底面 ABC，又 $BB_1\subset$平面 ABB_1A_1，所以满足条件侧面 $ABB_1A_1\perp$底面 ABC，又 $BC\subset$平面 ABC，所以 $BC\perp BB_1$，但此时 BC 与 AB 不垂直，所以“$BC\perp BB_1$”不是“$BC\perp AB$”的充分条件. 综上所述，“$BC\perp BB_1$”是“$BC\perp AB$”的必要不充分条件. 故选 B.
7. C 【解析】如图，在四边形 $ABCD$ 中，$\because AB=BC$，$AD=CD$，$\therefore BD\perp AC$. $\because$平面 $AA_1C_1C\perp$平面 $ABCD$，平面 $AA_1C_1C\cap$平面 $ABCD=AC$，$BD\subset$平面 $ABCD$，$\therefore BD\perp$平面 AA_1C_1C. 又 $CC_1\subset$平面 AA_1C_1C，$\therefore BD\perp CC_1$. 故选 C.



8. ACD 【解析】易知 A 正确；对于 B，当过点 P 且垂直于 l 的直线不在 α 内时，该直线不与 β 垂直，故 B 不正确；对于 C，由平面 $\alpha\perp$平面 β，$\alpha\cap\beta=l$，点 $P\in\alpha$，$P\notin l$，在 β 内作直线 $m\perp l$，由面面垂直的性质定理得 $m\perp\alpha$，设过点 P 且垂直于 α 的直线为 n，即 $n\perp\alpha$，则 $m/\!/n$，由线面平行的判定定理可知 $n/\!/\beta$，故 C 正确；对于 D，由面面垂直的性质定理可

知 D 正确. 故选 ACD.

9. ACD 【解析】∵ $PA=PB$, $AD=DB$, ∴ $PD\perp AB$. 又∵平面 $ABC\perp$ 平面 PAB, 平面 $ABC\cap$ 平面 $PAB=AB$, $PD\subset$ 平面 PAB, ∴ $PD\perp$ 平面 ABC. 故选 ACD.

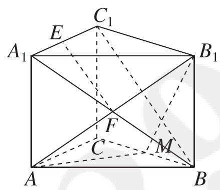
10. ②④ 【解析】①中,若这两条直线平行,则这两个平面不一定相互平行,①是假命题;②是面面垂直的判定定理,故是真命题;③中,垂直于同一条直线的两条直线不一定相互平行,如正方体中共顶点的三条棱,故是假命题;易知④是真命题.

11. 直角 【解析】设 P 在平面 ABC 上的射影为 O. ∵平面 $PAB\perp$ 底面 ABC, 平面 $PAB\cap$ 平面 $ABC=AB$, ∴ $O\in AB$. 连接 OC, ∵ $PA=PB=PC$, ∴ $OA=OB=OC$, ∴ O 是 $\triangle ABC$ 的外心,且是 AB 的中点, ∴ $\triangle ABC$ 是直角三角形.

12. 垂 【解析】连接 AH, BH, CH. 由三个侧面两两垂直知三条侧棱两两垂直,易得 $PA\perp$ 平面 PBC, $PB\perp$ 平面 PAC, $PC\perp$ 平面 PAB, 则有 $BC\perp PA$, $AB\perp PC$, $CA\perp PB$. 由 $BC\perp PA$, $PH\perp BC$, $PA\cap PH=P$, 得 $BC\perp$ 平面 PAH, 则 $BC\perp AH$. 同理可得 $AB\perp CH$, $CA\perp BH$, 所以 H 为 $\triangle ABC$ 的垂心.

13. **证明**:(1)在三棱锥 D-ABC 中,
因为侧面 $ACD\perp$ 底面 ABC, 侧面 $ACD\cap$ 底面 $ABC=AC$, $AC\perp BC$, $BC\subset$ 平面 ABC,
所以 $BC\perp$ 平面 ACD,
又 $AE\subset$ 平面 ACD, 所以 $BC\perp AE$.
因为 $AC=AD$, E 是 CD 的中点, 所以 $AE\perp CD$,
又 $BC\cap CD=C$, BC, $CD\subset$ 平面 BCD,
所以 $AE\perp$ 平面 BCD.
(2)因为 $AE\perp$ 平面 BCD, $BD\subset$ 平面 BCD, 所以 $AE\perp BD$,
又 $AF\perp BD$, $AE\cap AF=A$, AE, $AF\subset$ 平面 AEF,
所以 $BD\perp$ 平面 AEF,
又 $EF\subset$ 平面 AEF, 所以 $BD\perp EF$,
又 $CH\perp BD$, EF, $CH\subset$ 平面 BCD,
所以 $EF/\!/CH$, 又 $EF\subset$ 平面 AEF, $CH\not\subset$ 平面 AEF,
所以 $CH/\!/$平面 AEF.

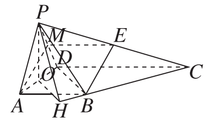
14. **证明**:(1)如图,连接 A_1B, BC_1,



∵四边形 ABB_1A_1 为矩形, F 为 AB_1 的中点,
∴ F 为 A_1B 的中点.
又 E 为 A_1C_1 的中点,
∴ $EF/\!/BC_1$.
∵ $BC_1\subset$ 平面 BB_1C_1C,
$EF\not\subset$ 平面 BB_1C_1C,
∴ $EF/\!/$平面 BB_1C_1C.
(2)在矩形 BCC_1B_1 中, $BC=\sqrt{2}BB_1$, 则 $\tan\angle CBC_1=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,
$\tan\angle B_1MB=\sqrt{2}$,
∴ $\tan\angle CBC_1\cdot\tan\angle B_1MB=1$,
∴ $\angle CBC_1+\angle B_1MB=\dfrac{\pi}{2}$, ∴ $BC_1\perp B_1M$.
∵ $EF/\!/BC_1$, ∴ $EF\perp B_1M$. 在正三棱柱 ABC-$A_1B_1C_1$ 中, 底面 $ABC\perp$ 平面 BB_1C_1C, ∵ M 为 BC 的中点, $\triangle ABC$ 为正三角形, ∴ $AM\perp BC$.
∵平面 $ABC\cap$ 平面 $BB_1C_1C=BC$, $AM\subset$ 平面 ABC,
∴ $AM\perp$ 平面 BB_1C_1C.
∵ $BC_1\subset$ 平面 BB_1C_1C, ∴ $AM\perp BC_1$,
又 $EF/\!/BC_1$, ∴ $EF\perp AM$.
∵ $AM\cap B_1M=M$, ∴ $EF\perp$ 平面 AB_1M.

15. CD 【解析】取 BD 的中点 E, 连接 $A'E$. 由 $AD/\!/BC$, $AD=AB=1$, $AD\perp AB$, 得 $\angle DBC=\angle ADB=45°$. 又 $\angle BCD=45°$, 所以 $\triangle BCD$ 为等腰直角三角形, 所以 $CD\perp BD$. 因为平面 $A'BD\perp$ 平面 BCD, 平面 $A'BD\cap$ 平面 $BCD=BD$, $CD\subset$ 平面 BCD, 所以 $CD\perp$ 平面 $A'BD$, 故 C 正确. 由 E 为 BD 的中点, 得 $A'E\perp BD$, 又平面 $A'BD\perp$ 平面 BCD, 平面 $A'BD\cap$ 平面 $BCD=BD$, $A'E\subset$ 平面 $A'BD$, 所以 $A'E\perp$ 平面 BCD, 所以 $A'E\perp BC$. 假设 $A'D\perp BC$, 则由 $A'E\cap A'D=A'$, 可得 $BC\perp$ 平面 $A'BD$, 故 $BC\perp BD$, 与已知矛盾, 故假设不成立, 故 A 错误. 三棱锥 A'-BCD 的体积为 $\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{6}$, 故 B 错误. 在直角三角形 $A'CD$ 中, $A'C^2=CD^2+A'D^2$, 所以 $A'C=\sqrt{3}$. 在 $\triangle A'BC$ 中, $A'B=1$, $BC=2$, $A'C=\sqrt{3}$, 满足 $BC^2=A'B^2+A'C^2$, 所以 $BA'\perp CA'$. 又 $BA'\perp DA'$, $DA'\cap CA'=A'$, 所以 $BA'\perp$ 平面 $A'DC$, 因为 $BA'\subset$ 平面 $A'BC$, 所以平面 $A'BC\perp$ 平面 $A'DC$, 故 D 正确. 故选 CD.

16. **解**:(1)证明:取 PD 的中点 M, 连接 AM, ME, 如图.



因为 E, M 分别为 PC, PD 的中点, 所以 $ME/\!/CD$ 且 $ME=\dfrac{1}{2}CD$,
又 $AB/\!/CD$ 且 $AB=\dfrac{1}{2}CD$,
所以 $ME/\!/AB$ 且 $ME=AB$,
所以四边形 $ABEM$ 为平行四边形, 所以 $AM/\!/BE$.
因为平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$, 平面 $PAD\cap$ 平面 $ABCD=AD$, $CD\perp AD$, $CD\subset$ 平面 $ABCD$,
所以 $CD\perp$ 平面 PAD,
又 $AM\subset$ 平面 PAD, 所以 $AM\perp CD$.
因为 $PA=AD$, M 为 PD 的中点, 所以 $AM\perp PD$,
又 $PD\cap CD=D$, PD, $CD\subset$ 平面 PCD,
所以 $AM\perp$ 平面 PCD, 所以 $BE\perp$ 平面 PCD.
(2)取 AD 的中点 O, 在平面 $ABCD$ 内过 O 作 $OH\perp BC$, 交 CB 的延长线于 H, 连接 PO, PH,
因为 $PA=PD$, O 为 AD 的中点, 所以 $PO\perp AD$,
又平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$, 平面 $PAD\cap$ 平面 $ABCD=AD$, $PO\subset$ 平面 PAD,
所以 $PO\perp$ 平面 $ABCD$.
因为 $BC\subset$ 平面 $ABCD$, 所以 $PO\perp BC$.
因为 $PO\cap OH=O$, 所以 $BC\perp$ 平面 POH,
又 $PH\subset$ 平面 POH, 所以 $BC\perp PH$,
所以 $\angle PHO$ 为二面角 P-BC-D 的平面角.
设 $AD=2$, 则 $PO=\sqrt{3}$, $OH=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$, 则 $\tan\angle PHO=\dfrac{PO}{OH}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$, 则 $\cos\angle PHO=\dfrac{\sqrt{15}}{5}$,
所以二面角 P-BC-D 的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{15}}{5}$.

滚动习题(七)

1. B 【解析】对于 A, 若 $l/\!/m$, $m\subset\alpha$, 则 $l/\!/\alpha$ 或 $l\subset\alpha$, 故 A 错误;对于 B, 若 $l\perp\alpha$, $m\subset\alpha$, 则 $l\perp m$, 故 B 正确;对于 C, 若 $l\perp m$, $l\perp\alpha$, 则 $m\subset\alpha$ 或 $m/\!/\alpha$, 故 C 错误;对于 D, 若 $l/\!/\alpha$, $m\subset\alpha$, 则 $l/\!/m$ 或 l 与 m 异面, 故 D 错误. 故选 B.

2. D 【解析】在 $\triangle ABC$ 中, 因为 $\dfrac{AD}{DB}=\dfrac{AE}{EC}$, 所以 $DE/\!/BC$, 又 $BC\not\subset$ 平面 α, $DE\subset$ 平面 α, 所以 $BC/\!/$平面 α. 故选 D.

3. C 【解析】当 l 与平面 α 相交时, 在 α 内不存在直线与直线 l 平行, 故①是假命题, 其余均是真命题. 故选 C.

4. B 【解析】由题意知, 正方体的四条体对角线 AC_1, A_1C, B_1D, BD_1 满足与 AB, AD, AA_1 所成的角都相等, 其中经过点 A 的一条体对角线为 AC_1, 再将其余三条体对角线平移到过点 A 即可, 所以这样的直线 l 可以作 4 条. 故选 B.

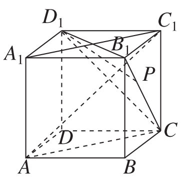
5. D 【解析】取 AB 的中点 D, 连接 PD, QD, PQ, 设 PQ 交平面 ABC 于点 O, 连接 OD. 由正棱锥的性质及对称性易知 O 为 $\triangle ABC$ 的中心, 且 $PD\perp AB$, $DQ\perp AB$, 故 $\angle PDQ$ 即为二面角 P-AB-Q 的平面角, 设正三棱锥的侧棱长为 2, 易得 $AB=2\sqrt{2}$, $PD=DQ=\sqrt{2}$, $OD=\dfrac{\sqrt{3}}{6}AB=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$, 则 $PQ=2PO=2\times\sqrt{(\sqrt{2})^2-\left(\dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)^2}=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$. 在 $\triangle PDQ$ 中, 由余弦定理得 $\cos\angle PDQ=\dfrac{PD^2+DQ^2-PQ^2}{2PD\cdot DQ}=\dfrac{2+2-\dfrac{16}{3}}{2\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=-\dfrac{1}{3}$.
故选 D.

6. A 【解析】在正方形 $SG_1G_2G_3$ 中, 因为 $SG_1\perp G_1E$, $SG_3\perp G_3F$, 所以在四面体中有 $SG\perp EG$, $SG\perp FG$, 又 $GE\cap GF=$

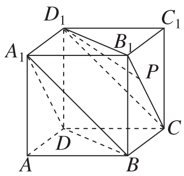
G,所以 $SG\perp\triangle EFG$ 所在平面.故选 A.

7. AD 【解析】对于 A,可知直线 a 与平面 α 内两条相交直线垂直,则 $a\perp\alpha$,故 A 正确;对于 B,缺少条件 $a\subset\beta$,所以不能保证 $a\perp\alpha$,故 B 错误;对于 C,当 a 与两平面的交线不垂直时,$a\perp\alpha$ 不成立,故 C 错误;对于 D,因为 $l\perp\alpha$,$a/\!/l$,所以 $a\perp\alpha$,故 D 正确.故选 AD.

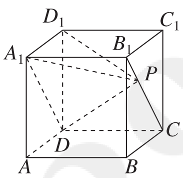
8. ABC 【解析】对于 A,如图①所示,连接 B_1D_1,D_1C,A_1C_1,AC,由正方体的性质可得 $B_1D_1\perp A_1C_1$,$CC_1\perp$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$,因为 $B_1D_1\subset$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$,所以 $B_1D_1\perp CC_1$,又 $A_1C_1\cap CC_1=C_1$,A_1C_1,$CC_1\subset$ 平面 ACC_1A_1,所以 $B_1D_1\perp$ 平面 ACC_1A_1.因为 $AC_1\subset$ 平面 ACC_1A_1,所以 $B_1D_1\perp AC_1$.同理可得 $AC_1\perp B_1C$.因为 $B_1D_1\cap B_1C=B_1$,B_1D_1,$B_1C\subset$ 平面 B_1CD_1,所以 $AC_1\perp$ 平面 B_1CD_1,又 $D_1P\subset$ 平面 B_1CD_1,所以 $D_1P\perp AC_1$,故 A 正确.对于 B,如图②所示,连接 CD_1,B_1D_1,易证 $BD/\!/B_1D_1$,$A_1D/\!/B_1C$,因为 $A_1D\subset$ 平面 A_1BD,$B_1C\not\subset$ 平面 A_1BD,所以 $B_1C/\!/$ 平面 A_1BD.因为 $BD\subset$ 平面 A_1BD,$B_1D_1\not\subset$ 平面 A_1BD,所以 $B_1D_1/\!/$ 平面 A_1BD,又 $B_1D_1\cap B_1C=B_1$,B_1D_1,$B_1C\subset$ 平面 B_1CD_1,所以平面 $A_1BD/\!/$ 平面 B_1CD_1,又 $D_1P\subset$ 平面 B_1CD_1,所以 $D_1P/\!/$ 平面 A_1BD,故 B 正确.对于 C,如图③所示,设 P 到平面 A_1D_1D 的距离为 h,则 $V_{A_1\text{-}DPD_1}=V_{P\text{-}A_1D_1D}=\frac{1}{3}S_{\triangle A_1D_1D}\cdot h$,因为 $CD\perp$ 平面 DD_1A_1A,所以 $h=CD$,点 P 是 B_1C 上一个动点,因为 $A_1D/\!/B_1C$,$A_1D\subset$ 平面 A_1ADD_1,$B_1C\not\subset$ 平面 A_1ADD_1,所以 $B_1C/\!/$ 平面 A_1ADD_1,所以点 P 到平面 A_1ADD_1 的距离为定值,又 $\triangle A_1D_1D$ 的面积也为定值,所以三棱锥 $A_1\text{-}DPD_1$ 的体积是定值,故 C 正确.对于 D,连接 C_1P,因为 $D_1C_1\perp$ 平面 BCC_1B_1,所以 $\angle D_1PC_1$ 即为直线 D_1P 与平面 BCC_1B_1 所成的角,$\tan\angle D_1PC_1=\frac{D_1C_1}{C_1P}$,当 P 从 B_1 移动到 C 的过程中,C_1P 的长度先变小后变大,D_1C_1 的长度不变,所以 $\tan\angle D_1PC_1$ 先变大后变小,故 D 错误.故选 ABC.



①



②



③

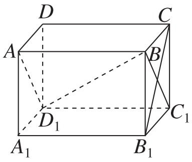
9. 若 $a\perp\alpha$,$b/\!/\alpha$,则 $a\perp b$ 【解析】过 b 作平面 β,使得 $\beta\cap\alpha=c$,$\because b/\!/\alpha$,$b\subset\beta$,$\beta\cap\alpha=c$,$\therefore b/\!/c$,又 $a\perp\alpha$,$c\subset\alpha$,$\therefore a\perp c$,$\therefore a\perp b$.

10. $\sqrt{5}$ 【解析】$\because$ 平面 $PAC\perp$ 平面 ABC,平面 $PAC\cap$ 平面 $ABC=AC$,$\angle PAC=90^\circ$,即 $PA\perp AC$,$PA\subset$ 平面 PAC,$\therefore PA\perp$ 平面 ABC.又 $AB\subset$ 平面 ABC,$\therefore PA\perp AB$,$\therefore PB=\sqrt{PA^2+AB^2}=\sqrt{5}$.

11. $\frac{\sqrt{5}}{5}$ 【解析】因为 E,F 分别为棱 AA_1,BB_1 的中点,所以 $EF/\!/AB$ 且 $EF=AB=1$,又 $AB\perp$ 平面 ADD_1A_1,所以 $EF\perp$ 平面 ADD_1A_1,又 $D_1E\subset$ 平面 ADD_1A_1,所以 $EF\perp D_1E$,又 $D_1E=\sqrt{1^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}$,所以 $S_{\triangle D_1EF}=\frac{1}{2}\times1\times\frac{\sqrt{5}}{2}=\frac{\sqrt{5}}{4}$.连接 B_1E,B_1D_1,则 $V_{D_1\text{-}B_1EF}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times1\times1=\frac{1}{12}$,设点 B_1 到平面 D_1EF 的距离为 d,则由 $V_{B_1\text{-}D_1EF}=V_{D_1\text{-}B_1EF}$,得 $\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{5}}{4}d=\frac{1}{12}$,解得 $d=\frac{\sqrt{5}}{5}$,故点 B_1 到平面 D_1EF 的距离为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

12. $\frac{\sqrt{6}}{9}\pi$ 【解析】因为 $A_1B_1\perp$ 平面 BB_1C_1C,且 $A_1P=\frac{\sqrt{15}}{3}$,所以点 P 的轨迹是圆心为 B_1,半径 $r=\sqrt{A_1P^2-A_1B_1^2}=\sqrt{\frac{5}{3}-1}=\frac{\sqrt{6}}{3}$ 的圆在 $\triangle BCC_1$ 内的部分.取 BC_1 的中点 E,连接 B_1E,则 $B_1E\perp BC_1$,且 $B_1E=\frac{1}{2}BC_1=\frac{\sqrt{2}}{2}$,设圆弧交 BC_1 于 M,N 两点,连接 B_1M,B_1N,则 $\sin\angle B_1ME=\frac{B_1E}{B_1M}=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{3}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,所以 $\angle B_1ME=\frac{\pi}{3}$,又因为 $B_1M=B_1N$,所以 $\triangle B_1MN$ 为等边三角形,所以 $\angle MB_1N=\frac{\pi}{3}$,故点 P 的轨迹的长度是 $\frac{\pi}{3}r=\frac{\pi}{3}\times\frac{\sqrt{6}}{3}=\frac{\sqrt{6}}{9}\pi$.

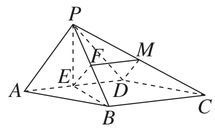
13. 解:(1)证明:如图,连接 BC_1,AD_1,



由题意可知,四边形 BB_1C_1C 为正方形,则 $B_1C\perp BC_1$,
因为 $C_1D_1\perp$ 平面 BCC_1B_1,$B_1C\subset$ 平面 BCC_1B_1,所以 $B_1C\perp C_1D_1$,
又 $BC_1\cap C_1D_1=C_1$,BC_1,$C_1D_1\subset$ 平面 ABC_1D_1,所以 $B_1C\perp$ 平面 ABC_1D_1,
又 $BD_1\subset$ 平面 ABC_1D_1,所以 $BD_1\perp B_1C$.
(2)由题意可知,$AB\perp$ 平面 ADD_1A_1,则 $\angle AD_1B$ 即为直线 BD_1 与平面 ADD_1A_1 所成的角,
因为 $AB=3$,$AD_1=2\sqrt{2}$,
所以 $\tan\angle AD_1B=\frac{AB}{AD_1}=\frac{3\sqrt{2}}{4}$,
故直线 BD_1 与平面 ADD_1A_1 所成角的正切值为 $\frac{3\sqrt{2}}{4}$.

14. 证明:(1)$\because CD=2AB$,E 为 CD 的中点,$\therefore AB=DE$,
又 $AB/\!/CD$,$\therefore$ 四边形 $ABED$ 为平行四边形,则 $AD/\!/BE$.
$\because AD\subset$ 平面 PAD,$BE\not\subset$ 平面 PAD,
$\therefore BE/\!/$ 平面 PAD.
(2)由 $AB/\!/CD$,$AB\perp AD$,得 $CD\perp AD$,
$\because$ 平面 $PAD\perp$ 底面 $ABCD$,平面 $PAD\cap$ 底面 $ABCD=AD$,$CD\subset$ 平面 $ABCD$,$\therefore CD\perp$ 平面 PAD.
$\because E$,F 分别为 CD,PC 的中点,$\therefore EF/\!/PD$,
又 $EF\not\subset$ 平面 PAD,$PD\subset$ 平面 PAD,$\therefore EF/\!/$ 平面 PAD.
$\because BE\cap EF=E$,$\therefore$ 平面 $BEF/\!/$ 平面 PAD,
$\therefore CD\perp$ 平面 BEF.

15. 解:(1)证明:因为 $PA=PD$,E 为 AD 的中点,
所以 $PE\perp AD$,
又平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$,平面 $PAD\cap$ 平面 $ABCD=AD$,$PE\subset$ 平面 PAD,所以 $PE\perp$ 平面 $ABCD$,
又 $BC\subset$ 平面 $ABCD$,所以 $PE\perp BC$.
(2)证明:由(1)知,$PE\perp$ 平面 $ABCD$,
又 $CD\subset$ 平面 $ABCD$,所以 $PE\perp CD$.
在矩形 $ABCD$ 中,$AD\perp CD$,
因为 $AD\cap PE=E$,AD,$PE\subset$ 平面 PAD,
所以 $CD\perp$ 平面 PAD,
又 $AP\subset$ 平面 PAD,所以 $CD\perp AP$.
因为 $PA\perp PD$,$CD\cap PD=D$,CD,$PD\subset$ 平面 PCD,所以 $PA\perp$ 平面 PCD,
又 $PA\subset$ 平面 PAB,所以平面 $PAB\perp$ 平面 PCD.
(3)当 M 为 PC 的中点时,$DM/\!/$ 平面 PEB.



证明如下:如图,取 PB 的中点 F,连接 EF,FM,
因为 M 为 PC 的中点,所以 $FM/\!/BC$,
且 $FM=\frac{1}{2}BC$.
在矩形 $ABCD$ 中,因为 E 为 AD 的中点,
所以 $ED/\!/BC$,且 $ED=\frac{1}{2}BC$,
所以 $ED/\!/FM$,且 $ED=FM$,
所以四边形 $EFMD$ 为平行四边形,所以 $DM/\!/EF$,
又 $EF\subset$ 平面 PEB,$DM\not\subset$ 平面 PEB,
所以 $DM/\!/$ 平面 PEB.

第九章 统计

9.1 随机抽样

9.1.1 简单随机抽样

1. B 【解析】该市场监管局的调查方法是抽样调查,A 错误;样本的个体是每种冷冻饮品的质量,B 正确;样本的总体是超市在售的 40 种冷冻饮品的质量,C 错误;样本容量是 20,D 错误. 故选 B.

2. D 【解析】对于 A,平面直角坐标系中有无数个点,这与要求总体中的个体数有限不相符,故 A 不符合题意;对于 B,按顺序搬 20 箱,不满足等可能性,故 B 不符合题意;对于 C,50 名战士是最优秀的,不满足等可能性,故 C 不符合题意;易知 D 符合题意. 故选 D.

3. D 【解析】样本平均数为 $\overline{x}$,总体平均数为 μ,统计学中,通常利用样本的指标估计总体的指标,所以样本平均数 $\overline{x}$ 是总体平均数 μ 的估计值. 故选 D.

4. A 【解析】对于 A,了解北京每天的流动人口数,调查范围广,应采用抽样调查,故 A 正确;对于 B,旅客上飞机前的安检,涉及到安全,事关重大,应采用全面调查,故 B 错误;对于 C,了解北京居民"2024 年十一假期"期间的出行方式,调查范围广,应采用抽样调查,故 C 错误;对于 D,某火箭军部队要了解某批反舰导弹的性能,由于调查具有破坏性,应采用抽样调查,故 D 错误. 故选 A.

5. A 【解析】∵抽取了 100 件进行质检,发现其中有 5 件不合格品,∴合格率为(100−5)÷100=95%,∴估计该厂这 10 万件产品中合格品有 10×95%=9.5(万件). 故选 A.

6. B 【解析】选项 A 中总体中的个体数较大,样本容量也较大,不适合用抽签法;选项 B 中总体中的个体数较小,样本容量也较小,且同厂生产的两箱产品可视为搅拌均匀了,可用抽签法;选项 C 中甲、乙两厂生产的两箱产品质量可能差别较大,不能满足搅拌均匀的条件,不能用抽签法;选项 D 中总体中的个体数较大,不适合用抽签法. 故选 B.

7. B 【解析】因为样本 $a_1,a_2,\cdots,a_{10}$ 的平均数为 $\overline{a}$,所以 $\overline{a}=\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_{10}}{10}$,即 $a_1+a_2+\cdots+a_{10}=10\overline{a}$. 同理可得 $b_1+b_2+\cdots+b_{10}=10\overline{b}$. 所以样本 $a_1,b_1,a_2,b_2,\cdots,a_{10},b_{10}$ 的平均数为 $\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_{10}+b_1+b_2+\cdots+b_{10}}{20}=\dfrac{1}{2}(\overline{a}+\overline{b})$,故选 B.

8. AD 【解析】对于 A,球的大小不同,会造成个体之间被抽到的可能性有差异,故不是简单随机抽样;对于 B,满足简单随机抽样的定义,故是简单随机抽样;易知选项 C 是简单随机抽样;对于 D,买彩票时随手写几个数字作为彩票号码,不能保证每个数字被选中的可能性相等,故不是简单随机抽样. 故选 AD.

9. AD 【解析】相对来说,小华的调查结果比小明的调查结果更接近总体平均数,故 A 正确;总体平均数是确定的数,样本平均数总是在总体平均数附近波动,故 B,C 错误,D 正确. 故选 AD.

10. ②①④③ 【解析】用抽签法进行抽样的第一步是对总体中的个体进行编号,然后做号签,放入容器并搅拌均匀,最后逐个不放回地抽取号签,取出的号签所对应的个体作为样本. 所以这些步骤的先后顺序应为②①④③.

11. $\dfrac{5}{19}$ 【解析】第二次抽取时,余下的每个个体被抽到的概率均为 $\dfrac{1}{4}$,则 $\dfrac{15-1}{n-1}=\dfrac{1}{4}$,解得 $n=57$,所以在整个抽样过程中,每个个体被抽到的概率为 $\dfrac{15}{57}=\dfrac{5}{19}$.

12. 55.6 55.6 【解析】由题意可知 B 样本数据为 48,55,50,60,65,所以 B 样本数据的平均数为 $\dfrac{1}{5}\times(48+55+50+60+65)=55.6$,据此,可以估计乙工厂生产的该种产品该项指标的总体平均数为 55.6.

13. **解**:第一步,将 100 名员工依次编号为 00,01,02,…,99;
第二步,利用随机数工具产生 0~99 内的随机数;
第三步,把产生的随机数作为抽中的编号,使与编号对应的员工被抽出,重复出现的随机数舍去,直到抽足样本所需要的人数.

14. **解**:所求平均时间为 $\dfrac{1}{20}\times(10+12+15+10+16+18+19+18+20+38+22+25+20+18+18+20+15+16+21+16)=18.35(\text{min})$.
校方安排学生每天吃午餐时间为 25 min 左右为宜,因为约有 95%的学生在 25 min 内可以就餐完毕.

15. ACD 【解析】A 显然正确;样本中 5 名男生成绩的平均数 $\overline{x}_{男}=\dfrac{1}{5}\times(86+94+88+92+90)=90$,5 名女生成绩的平均数 $\overline{x}_{女}=\dfrac{1}{5}\times(88+93+93+88+93)=91$,可知样本中 5 名男生成绩的平均数小于 5 名女生成绩的平均数,据此估计该班男生成绩的平均数小于该班女生成绩的平均数,故 B 错误,C 正确;可以计算样本中 10 名学生成绩的平均数,据此估计该班本次物理测验成绩的平均数,故 D 正确. 故选 ACD.

16. **解**:(1)设 x_1,x_2,x_3 分别为答对第一、二、三道题的人数,
则 $\begin{cases}x_1+x_2=26,\\x_1+x_3=24,\\x_2+x_3=22,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x_1=14,\\x_2=12,\\x_3=10.\end{cases}$
设三道题全答对的人数为 x,因为只答对一道题的人数为 6,只答对两道题的人数为 12,
所以 $6\times1+12\times2+3x=36$,解得 $x=2$,
即三道题全答对的人数为 2.
(2)由(1)知,共有 6+12+2=20(位)参赛选手,则所有参赛选手的平均分 $\overline{x}=\dfrac{1}{20}\times(14\times15+12\times15+10\times20)=29.5$.

9.1.2 分层随机抽样

1. C 【解析】简单随机抽样和分层随机抽样的共同点是抽样过程中每个个体被抽到的机会相同. 故选 C.

2. A 【解析】A 中,总体由差异明显的三部分构成,适合用比例分配的分层随机抽样的方法;B,D 中总体中的个体数较小,适合用简单随机抽样的方法;C 中总体中的个体无明显差异,故不适合用比例分配的分层随机抽样的方法. 故选 A.

3. D 【解析】根据题意,抽取的甲种型号产品的件数为 $\dfrac{200}{200+300+400}\times45=10$,抽取的乙种型号产品的件数为 $\dfrac{300}{200+300+400}\times45=15$,所以抽取的甲、乙两种型号产品的件数之和为 10+15=25. 故选 D.

4. A 【解析】用比例分配的分层随机抽样的方法抽取 4%的学生进行调查,则样本容量为(3500+4500+2000)×4%=400,抽取的高中生近视人数为 2000×4%×50%=40. 故选 A.

5. C 【解析】根据题意可知应抽取男生 7 人、女生 3 人,又抽出的男生的平均体重为 70 kg,抽出的女生的平均体重为 50 kg,所以估计该班学生的平均体重是 $\dfrac{70\times7+50\times3}{10}=64(\text{kg})$. 故选 C.

6. B 【解析】根据两种抽样方法的特点知,不论采用哪种抽样方法,总体中每个个体入样的可能性都相等,都是 $\dfrac{1}{5}$,故①正确,②错误;因为总体中有差异较明显的三个层(一级品、二级品和三级品),所以方法二抽到的样本更有代表性,故③正确,④错误. 故选 B.

7. A 【解析】根据题意可知,样本中参与跑步的人数为 $200\times\dfrac{3}{5}=120$,所以从高二年级参与跑步的学生中应抽取 $120\times\dfrac{3}{2+3+5}=36$(人).

8. ABC 【解析】对于 A,从中随机抽取 30 名同学,则样本容量为 30,故 A 正确;对于 B,设 120 名社团成员中的男生有 n 人,因为按性别采用比例分配的分层随机抽样的方法时应从

男生中抽取 18 人,所以$\frac{18}{30}=\frac{n}{120}$,解得 $n=72$,所以 120 名社团成员中的男生有 72 人,故 B 正确;对于 C,设高二与高三年级的社团成员共有 m 人,因为按社团中高一、高二、高三年级的成员人数采用比例分配的分层随机抽样的方法时应从高一年级抽取 10 人,所以$\frac{30-10}{30}=\frac{m}{120}$,解得 $m=80$,所以高二与高三年级的社团成员共有 80 人,故 C 正确;对于 D,由 C 可知高一年级的社团成员有 $120-80=40$(人),由 B 可知 120 名社团成员中的女生有 $120-72=48$(人),故高一年级社团成员中的女生最多有 40 人,故 D 错误.故选 ABC.

9. ABD 【解析】对于 A,由题可知,从 50 岁以上的员工中抽取了 $2000\times\frac{20\,000-8000-10\,000}{20\,000}=200$(人),故 A 正确;对于 B,每名员工被抽到的概率均为$\frac{2000}{20\,000}=\frac{1}{10}$,故 B 正确;对于 C,估计该公司员工身体健康状况的良好率为$\frac{8000}{20\,000}\times99\%+\frac{10\,000}{20\,000}\times98\%+\frac{20\,000-8000-10\,000}{20\,000}\times96\%=98.2\%$,故 C 错误;对于 D,估计该公司 30 岁以下员工中身体健康状况不良好的人数为 $8000\times(1-99\%)=80$,30 岁到 50 岁员工中身体健康状况不良好的人数为 $10\,000\times(1-98\%)=200$,50 岁以上员工中身体健康状况不良好的人数为 $(20\,000-8000-10\,000)\times(1-96\%)=80$,故估计该公司员工身体健康状况不良好的人数最多的年龄段是 30 岁到 50 岁,故 D 正确.故选 ABD.

10. 8 【解析】根据题意,从“史政生”组合中选出的学生人数为 $72\times\frac{80}{480+40+120+80}=8$.

11. 90,70 84.375 【解析】由题意可得从高一年级抽取的学生人数为$\frac{450}{450+350}\times160=90$,从高二年级抽取的学生人数为$\frac{350}{450+350}\times160=70$,据此估计此次数学竞赛的平均成绩为$\frac{90}{90+70}\times80+\frac{70}{90+70}\times90=84.375$(分).

12. 6 【解析】因为“泥塑”社团的人数占两个社团总人数的$\frac{3}{5}$,所以“剪纸”社团的人数占两个社团总人数的$\frac{2}{5}$,则“剪纸”社团的人数为 $400\times\frac{2}{5}=160$.因为 $x:y:z=5:3:2$,所以“剪纸”社团中高二年级学生的人数为 $160\times\frac{3}{2+3+5}=48$,所以应从高二年级“剪纸”社团的学生中抽取 $48\times\frac{50}{400}=6$(人).

13. **解:**(1)按年龄段采用比例分配的分层随机抽样的方法,从老年人中抽取 4 人,从中年人中抽取 12 人,从青年人中抽取 24 人.
(2)按岗位采用比例分配的分层随机抽样的方法,从管理岗位抽取 2 人,从技术开发岗位抽取 4 人,从营销岗位抽取 6 人,从生产岗位抽取 13 人.

14. **解:**该武警大队共有 $30+30+40=100$(人),
则甲中队参加考核的人数为$\frac{30}{100}\times30=9$,乙中队参加考核的人数为$\frac{30}{100}\times30=9$,丙中队参加考核的人数为$\frac{40}{100}\times30=12$,
所以参加考核的 30 人的平均射击环数为$\frac{9}{30}\times8.8+\frac{9}{30}\times8.5+\frac{12}{30}\times8.1=8.43$,故估计该武警大队队员的平均射击水平为 8.43 环.

15. C 【解析】$\because 360:280:200=9:7:5$,$\therefore$甲应付$\frac{9}{9+7+5}\times65=\frac{195}{7}$(钱),乙应付$\frac{7}{9+7+5}\times65=\frac{65}{3}$(钱),丙应付$\frac{5}{9+7+5}\times65=\frac{325}{21}$(钱),C 中说法错误.故选 C.

16. **解:**由题意得$\frac{nx+my}{n+m}=\frac{n}{n+m}x+\frac{m}{n+m}y=ax+(1-a)y$,
$\therefore a=\frac{n}{n+m},1-a=\frac{m}{n+m}$.
$\because 0<a<\frac{1}{2},\therefore 1-a>a$,
$\therefore \frac{m}{n+m}>\frac{n}{n+m},\therefore m>n$.

9.1.3 获取数据的途径

1. A 【解析】对于选项 A,某新型导弹的射程没有现存数据可以查询,因而需要通过试验获取;对于选项 B,某学校的男女生人数之比可以通过查询获取,不需要通过试验获取;对于选项 C,华为手机的市场占有率可以通过调查获取,不需要通过试验获取;对于选项 D,期中考试时某班的数学成绩可以通过查询获取,不需要通过试验获取.故选 A.
2. C 【解析】建造“中国天眼”的目的是通过观察获取数据.
3. C 【解析】选项 A,B,D 中调查对象的数目较多,适合用抽样调查;选项 C 中调查对象的数目较少,适合用普查.故选 C.
4. B 【解析】①因为一个班级学生的人数不太多,吃早餐情况的全面调查也容易操作,所以适合用全面调查;②某种饮料的数量太多,质量合格情况适合用抽样调查;③飞行员的职业特点决定了他们的身体健康指标必须用全面调查;④某个水库中鱼的种类和数量一般都较多,不适合用全面调查.故选 B.
5. D 【解析】A 项中,某地七月份的日平均最高气温不能代表该地全年的日平均最高气温;B 项中,在农村调查得到的平均寿命不能代表市民的平均寿命;C 项中,实验田的产量与水稻的实际产量相差可能较大;只有 D 项所抽取的样本具有代表性.故选 D.
6. B 【解析】对于新型汽车的某项指标,合理的获得数据的方法是通过试验获取数据.
7. ACD 【解析】对于 A,由于民意测验的特殊性,不可能也没必要对所有人都进行调查,因此适合用抽样调查,故 A 正确;对于 B,易知适合用全面调查,故 B 错误;对于 C,因为无法对所有的黄河水质进行全面调查,所以适合用抽样调查,故 C 正确;对于 D,对药品的质量检验具有破坏性,所以适合用抽样调查,故 D 正确.故选 ACD.
8. 通过查询获得数据 【解析】借阅《中国统计年鉴》属于通过查询获得数据.
9. ①②③ 【解析】由获取数据的各种途径的特点与要求,可知①②③正确,④错误.
10. ③ 【解析】①中,少年体校中男子篮球、排球队员的身高一定高于一般男生,因此不能用测量的结果去估计总体的结果,故方案①不合理;②中,用外地学生的身高不能准确地反映本地学生身高的实际情况,故方案②不合理;③中,因为高中三个年级男生的身高是不同的,所以应该用比例分配的分层随机抽样的方法从高中三个年级抽取 180 名男生调查其身高,故方案③合理.故填③.
11. **解:**(1)为了知道某种新型除草剂能否有效抑制杂草的生长,可以通过试验获取数据.
(2)为了知道高中生最喜欢的流行歌曲是哪首,可以通过调查获取数据.
12. **解:**由于学生的身高会随着年龄的增长而增高,校医务室想了解全校高中学生的身高情况,在抽样时应当关注高中各年级学生的身高,并且还要分性别进行抽查.
如果只抽取高一年级的学生,用他们的身高估计全校高中学生的身高,所得结果一定是片面的.
这个问题涉及的调查对象的总体是该校全体高中学生的身高,其中准备抽取的 50 名学生的身高是样本.
13. **解:**小明的结论是错误的.
在众多的高考落榜生中,走出另外一条成功之路的是少数,小明通过研究一些期刊杂志社报道过的一些成功人士就得出结论,这样的结论是片面的,原因在于他的抽样(所研究的这些成功人士)不具有代表性.

9.2 用样本估计总体

9.2.1 总体取值规律的估计

第 1 课时 频率分布表和频率分布直方图

1. C 【解析】由题知样本数据的最大值为 13，最小值为 6，故极差为 $13-6=7$.

2. D 【解析】由极差为 $168-142=26$，组距为 4，可得 $\frac{26}{4}=6.5$，则组数为 7. 故选 D.

3. D 【解析】样本数据共有 20 个. 根据选项，可分为 4 组，各组的频数和频率如下表所示：

分组	频数	频率
[5.5,7.5)	2	0.1
[7.5,9.5)	6	0.3
[9.5,11.5)	8	0.4
[11.5,13.5]	4	0.2
合计	20	1.0

从表中可以看出频率为 0.2 的区间是[11.5,13.5]，故选 D.

4. C 【解析】所有小长方形的面积和为 1，因为中间小长方形的面积是其余 4 个小长方形面积之和的 $\frac{1}{3}$，所以中间小长方形的面积为 $\frac{1}{4}$，即频率为 0.25，又中间一组的频数为 10，所以样本容量为 40，故选 C.

5. C 【解析】在频率分布直方图中，设[80,90)对应的小矩形的高为 a，则可得 $(0.005+a+0.04+0.015+0.01)\times10=1$，解得 $a=0.03$，所以成绩落在区间[80,90)内的人数为 $200\times0.03\times10=60$. 故选 C.

6. A 【解析】根据频率分布直方图可列下表：

阅读时间(分钟)	[0,10)	[10,20)	[20,30)	[30,40)	[40,50)	[50,60]
抽样人数	10	18	22	25	20	5

抽取的 100 名学生中有 50 名为阅读霸，据此可估计该校有一半学生为阅读霸. 故选 A.

7. A 【解析】设体重在[50,55)内的频率为 k，则 $k+2k+3k+(0.0375+0.0125)\times5=1$，解得 $k=0.125$，∴第二小组的频率为 $2k=0.25$. ∵第二小组的频数为 13，∴抽取的男生人数为 $\frac{13}{0.25}=52$，又全校男、女生的人数之比为 13∶12，∴全校抽取的学生人数为 $52\times\frac{13+12}{13}=100$. 故选 A.

8. ABC 【解析】对于 A，在高一年级学生中，估计参加活动次数是 3 的学生人数为 $1000\times0.26=260$，A 中说法不正确；对于 B，在高一年级学生中估计参加活动次数是 2 或 4 的学生人数为 $1000\times(0.2+0.18)=380$，B 中说法不正确；对于 C，在高一年级学生中，估计参加活动次数不高于 2 的学生人数为 $1000\times(0.08+0.1+0.2)=380$，C 中说法不正确；对于 D，在高一年级学生中，估计参加活动次数不低于 4 的学生人数为 $1000\times(0.18+0.12+0.04+0.02)=360$，D 中说法正确. 故选 ABC.

9. AC 【解析】对于 A，由题图可知 $10\times(m+0.020+0.016+0.016+0.011+0.006)=1$，解得 $m=0.031$，故 A 正确；对于 B，因为成绩不低于 140 分的频率为 $0.011\times10=0.11$，所以 $n=\frac{110}{0.11}=1000$，故 B 错误；对于 C，因为成绩在 100 分以下的频率为 $0.006\times10=0.06$，所以成绩在 100 分以下的人数为 $1000\times0.06=60$，故 C 正确；对于 D，成绩在区间[120,140)内的频率为 $0.031\times10+0.016\times10=0.47<0.5$，人数占一小半，故 D 错误. 故选 AC.

10. 144 24 【解析】由题意得 $\frac{1}{4}=\frac{36}{n}$，所以 $n=36\times4=144$，同理 $\frac{1}{6}=\frac{x}{144}$，解得 $x=24$.

11. 0.76 【解析】由表可得，出现“安全水位”的频率是 $0.1+0.28+0.38=0.76$.

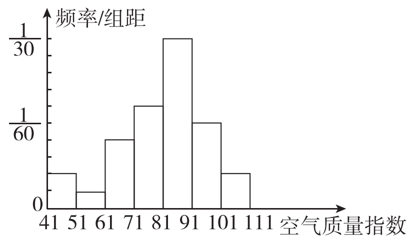
12. $\frac{27}{100}$ 78 【解析】设第 1 组的频数为 x，则前 4 组的频数分别为 $x,3x,9x,27x$，后 5 组的频数分别为 $27x-5,27x-10,27x-15,27x-20,27x-25$，由题意得 $x+3x+9x+27x+(27x-5)+(27x-10)+(27x-15)+(27x-20)+(27x-25)=100$，解得 $x=1$，故 $a=\frac{27}{100}$，$b=27+22+17+12=78$.

13. 解：(1)由题意得 $(0.050+0.100+0.150+0.125+x)\times2=1$，解得 $x=0.075$.
(2)样本中身高低于 100 厘米的频率为 $(0.050+0.100)\times2=0.3$，故样本量为 $\frac{36}{0.3}=120$.
(3)样本中身高位于[98,104)内的频率为 $(0.100+0.150+0.125)\times2=0.75$，所以样本中身高位于[98,104)内的人数为 $0.75\times120=90$.

14. 解：(1)作出频率分布表如下表：

分组	频数	频率
[41,51)	2	$\frac{1}{15}$
[51,61)	1	$\frac{1}{30}$
[61,71)	4	$\frac{2}{15}$
[71,81)	6	$\frac{1}{5}$
[81,91)	10	$\frac{1}{3}$
[91,101)	5	$\frac{1}{6}$
[101,111]	2	$\frac{1}{15}$
合计	30	1

(2)作出频率分布直方图如图所示.



(3)该市一个月中的空气质量有 2 天处于优的水平，占当月天数的 $\frac{1}{15}$，有 26 天处于良的水平，占当月天数的 $\frac{13}{15}$，所以处于优或良的天数为 28，占当月天数的 $\frac{14}{15}$. 说明该市空气质量基本良好.

15. D 【解析】采取了新的培育方法后，大棚西红柿的产量有了明显的变化，故 A 中说法正确；采取了新的培育方法后，大棚西红柿的平均产量有所提高，故 B 中说法正确；采取了新的培育方法后，大棚西红柿的产量更加稳定了，故 C 中说法正确；新、旧培育方法对大棚西红柿的产量影响较大，故 D 中说法错误. 故选 D.

16. 解：(1)样本中“水果达人”的频率为 $(0.0075+0.005)\times20=0.25$，
∴样本中“水果达人”的人数为 $100\times0.25=25$.
由题图可知，消费金额在[80,100)与[100,120]内的人数之比为 3∶2，其中消费金额不低于 100 元的人数为 $25\times\frac{2}{5}=10$，

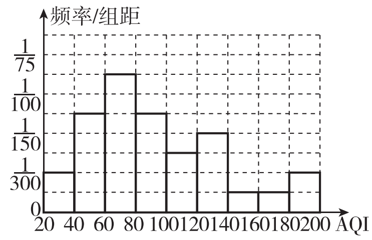
∴抽取的 5 人中消费金额不低于 100 元的人数为 $5\times\frac{10}{25}=2$.

(2)依题意得,该游客要购买原价为 110 元的水果,
若选择方案一,则需支付$(80-8)+30=102$(元),
若选择方案二,则需支付 $50+(80-50)\times0.9+(100-80)\times0.8+(110-100)\times0.7=100$(元),
∴应该选择方案二.

第 2 课时　统计图中的样本数据的分布

1. B　**[解析]** 由题意,高三年级应分得银杏树的数量为 $1200\times23\%\times\frac{200}{600+400+200}=46$(棵).故选 B.
2. D　**[解析]** 欲反映学生感兴趣的各类图书所占百分比,最适合的统计图是扇形图.故选 D.
3. B　**[解析]** 条形图易于比较数据之间的差异,故①与 a;扇形图易于显示每组数据相对于总数所占的比例,故②与 d;折线图易于显示数据的变化趋势,故③与 c;直方图易于显示各组之间的频数的差别,故④与 b.故选 B.
4. D　**[解析]** 最高气温高于 25 ℃的月份有 3 个,故 A 中结论正确;10 月份的最高气温不低于 5 月份的最高气温,故 B 中结论正确;月温差(最高气温减最低气温)的最大值出现在 1 月份,故 C 中结论正确;最低气温低于 0 ℃的月份有 3 个,故 D 中结论错误.故选 D.
5. A　**[解析]** 由图①得样本容量为$(350+200+450)\times15\%=150$,从 C 村抽取的户数为 $200\times15\%=30$,则抽取 C 村贫困户的户数为 $30\times0.5=15$.故选 A.
6. C　**[解析]** 对于 A,2024 年 1 月,商品零售总额同比增长 2.9%,故 A 错误;对于 B,2023 年 8 月,餐饮收入总额同比增加,故 B 错误;对于 C,2023 年 6 月～10 月,商品零售总额同比都增加,故 C 正确;对于 D,2023 年 12 月,餐饮收入总额环比增速并未告知,故 D 错误.故选 C.
7. B　**[解析]** ①从折线图能看出世界人口的变化情况,故①正确;②从条形图可得到 2050 年非洲人口将达到 18 亿,故②错误;③从扇形图能得到 2050 年亚洲人口比其他各洲人口的总和还要多,故③正确;④由题中三幅统计图并不能得出从 1957 年到 2050 年,哪个洲的人口增长速度最慢,故④错误.因此正确的说法是①③.故选 B.
8. ABC　**[解析]** 对于 A,根据 AQI 指数月折线图可知,全年平均 AQI 指数都小于 100,故全年平均 AQI 指数对应的空气质量等级为优或良,故 A 正确;对于 B,每个月 AQI 指数的最小值都不超过 50,故 B 正确;对于 C,2 月、8 月、9 月和 12 月的 AQI 指数的最大值均超过了 100,故 C 正确;对于 D,从折线图只能知道,2 月 AQI 指数的最大值最大,不能说明 2 月的空气质量为"污染"的天数最多,故 D 不正确.故选 ABC.
9. CD　**[解析]** 由条形图可知,采用 B,C,D 三种方式上学的学生共有 $42+30+18=90$(人),由扇形图可知,采用 D 方式上学的学生占 15%,所以共抽查了 $18\div15\%=120$(人),则采用 A 方式上学的学生有 $120-90=30$(人),所以条形图中 A 和 C 一样高,故 B 错误;扇形图中 A 和 C 的占比一样,都为 25%,所以扇形图中 A 的占比大于 D 的占比,故 C 正确;因为样本中选择自行乘车或家人接送的频率为 $\frac{42+30}{120}=60\%>50\%$,所以估计该校超过一半的学生选择自行乘车或家人接送,故 D 正确;因为采用 D 方式上学的学生人数最少,所以扇形图中 D 的占比最小,故 A 错误.故选 CD.
10. 甲　**[解析]** 从折线图可以很清楚地看到乙城市的气温变化较大,而甲城市的气温相对来说较稳定,变化基本不大.
11. 8　**[解析]** 由题意,第 1 周的命中频率为 $\frac{40}{72}=\frac{5}{9}$,第 2 周的命中频率为 $\frac{45}{79}$,第 3 周的命中频率为 $\frac{46}{76}=\frac{23}{38}$,第 4 周的命中频率为 $\frac{49}{81}$,第 5 周的命中频率为 $\frac{47}{82}$,第 6 周的命中频率为 $\frac{49}{82}$,第 7 周的命中频率为 $\frac{53}{83}$,第 8 周的命中频率为 $\frac{52}{80}=\frac{13}{20}$,所以第 8 周的命中频率最高.
12. 25%　**[解析]** 由题图知,35 岁以下的教师人数为 $50\div62.5\%=80$,所以 35 岁以下具有研究生学历的教师有 $80-50=30$(人),所以该地区 35 岁以下具有研究生学历的教师人数占教师总人数的百分比为 $30\div120=25\%$.
13. **解:**(1)由题图知,$4+8+10+18+10=50$,所以该校对 50 名学生进行了抽样调查.
(2)本次抽样调查中,最喜欢篮球活动的有 18 人.
由 $\frac{18}{50}\times100\%=36\%$,可知最喜欢篮球活动的人数占被调查人数的 36%.
(3)九年级学生人数占全校学生总人数的百分比为 $1-(30\%+40\%)=30\%$,则全校学生的总人数为 $300\div30\%=1000$,则可估计全校学生中最喜欢跳绳活动的人数为 $\frac{8}{50}\times1000=160$.
14. **解:**(1)

分组	频数	频率
[20,40]	2	$\frac{1}{15}$
(40,60]	5	$\frac{1}{6}$
(60,80]	7	$\frac{7}{30}$
(80,100]	5	$\frac{1}{6}$
(100,120]	3	$\frac{1}{10}$
(120,140]	4	$\frac{2}{15}$
(140,160]	1	$\frac{1}{30}$
(160,180]	1	$\frac{1}{30}$
(180,200]	2	$\frac{1}{15}$
合计	30	1



(2)由频率分布表知,该市本月 30 天中空气质量优良的天数为 19,故此人到达当天空气质量优良的可能性为 $\frac{19}{30}\approx0.63>0.6$,故可以认为此人到达当天空气质量优良的可能性超过 60%.

9.2.2　总体百分位数的估计

1. D　**[解析]** 因为数据共有 10 个,$10\times40\%=4$,所以第 40 百分位数是 $\frac{5+6}{2}=5.5$.故选 D.
2. C　**[解析]** 因为 $15\times70\%=10.5$,所以这 15 人成绩的 70% 分位数是第 11 个数,为 88.故选 C.
3. B　**[解析]** 因为样本 $a,0,1,2,3$ 的中位数为 1,所以 1 排在第三位,所以 $a\leqslant1$.故选 B.
4. B　**[解析]** 因为 $1200\times80\%=960$,所以成绩小于 103 分的学生最多有 960 人,所以成绩大于或等于 103 分的学生至少有 $1200-960=240$(人).故选 B.
5. C　**[解析]** 因为$(0.2a+0.3a+0.7a+0.6a+0.2a)\times10=1$,所以 $a=0.05$,所以参赛成绩位于[50,80)内的频率为 $10\times(0.01+0.015+0.035)=0.6$,参赛成绩位于[50,90)内的频率为 $10\times(0.01+0.015+0.035+0.03)=0.9$,则所有参赛同学成绩的第 75 百分位数位于[80,90)内,设其为 $80+y$,则 $0.03y=0.15$,解得 $y=5$,所以估计所有参赛同学成绩的第 75 百分位数为 85.故选 C.
6. A　**[解析]** 由表可知 AQI 位于[0,150)内的频率为

$22.8\%+33.2\%+18.6\%=74.6\%<80\%$，AQI 位于$[0,200)$内的频率为 $22.8\%+33.2\%+18.6\%+13.4\%=88\%>80\%$，所以第 80 百分位数在$[150,200)$内，由 $150+\frac{0.80-0.746}{0.134}\times 50\approx 170$，估计该市 2023 年全年 AQI 的第 80 百分位数约为 170. 故选 A.

7. D 【解析】由条形图可知，2018 年至 2022 年我国城乡居民社会养老保险基金收入逐年增加，故 A 中说法正确；2018 年至 2022 年我国城乡居民社会养老保险基金支出逐年增加，故 B 中说法正确；因为 $5\times 50\%=2.5$，所以 2018 年至 2022 年我国城乡居民社会养老保险基金收入数据的 50%分位数为 4852.9，故 C 中说法正确；因为 $5\times 40\%=2$，所以 2018 年至 2022 年我国城乡居民社会养老保险基金收入数据的 40%分位数为 $\frac{4107.0+4852.9}{2}=4479.95$，故 D 中说法错误. 故选 D.

8. ACD 【解析】12 个月的月降水量(单位：mm)从小到大排列为 46，48，51，53，53，56，56，56，58，64，66，71，由 $12\times 20\%=2.4$，得该地区月降水量的 20%分位数为 51，A 正确；由 $12\times 50\%=6$，得该地区月降水量的 50%分位数为 $\frac{56+56}{2}=56$，B 错误；由 $12\times 75\%=9$，得该地区月降水量的 75%分位数为 $\frac{58+64}{2}=61$，C 正确；由 $12\times 80\%=9.6$，得该地区月降水量的 80%分位数为 64，D 正确. 故选 ACD.

9. ABC 【解析】上四分位数即为第 75 百分位数，$18\times 75\%=13.5$，则将这 18 个数据按照从小到大的顺序排列后，第 14 个数据即为上四分位数，所以 a 应是将这 18 个数据按照从小到大的顺序排列后的第 14 个数，显然 a 不是最小的数. 而除去 a 后，按照从小到大的顺序排列后得到的第 13 个数为 83，第 14 个数为 85，所以 $83\leqslant a\leqslant 85$. 故选 ABC.

10. 161 【解析】将连续八届的进球总数从小到大排列为 141，145，147，161，169，171，171，172，因为 $8\times 40\%=3.2$，所以进球总数的第 40 百分位数是第 4 个数据 161.

11. -1 【解析】根据题意，数据 $1,3,4,x,y,y+2$ 的平均数为 $\frac{1+3+4+x+y+y+2}{6}$，50% 分位数为 $\frac{4+x}{2}$，所以 $\frac{1+3+4+x+y+y+2}{6}=\frac{4+x}{2}$，整理得 $y=x+1$，故 $x-y=-1$.

12. 1440 86.7 【解析】由题意知，这 100 名学生中每周课外阅读时间不低于 1 小时的频率为 $(0.015\,0+0.007\,5+0.005\,0+0.002\,5)\times 20=0.6$，所以估计该校学生每周课外阅读时间不低于 1 小时的人数为 $0.6\times 2400=1440$，即估计该校达标的学生人数为 1440. 因为前 4 组的频率之和为 $(0.002\,5+0.005\,0+0.012\,5+0.015\,0)\times 20=0.7$，第 5 组的频率为 $0.007\,5\times 20=0.15$，所以第 75 百分位数位于$[80,100)$内，所以估计该校学生每周课外阅读时间的第 75 百分位数为 $80+\frac{0.75-0.7}{0.15}\times 20\approx 86.7$.

13. 解：(1)$\because 30\times 25\%=7.5$，$\therefore$30 位学生参加语文竞赛的成绩的第一四分位数是从小到大排序后的第 8 个数，为 65.
(2)$\because 30\times 95\%=28.5$，$\therefore$30 位学生参加语文竞赛的成绩的第 95 百分位数是从小到大排序后的第 29 个数，为 99.

14. 解：(1)由频率分布直方图可知 $5\times(0.01+0.07+x+0.04+0.02)=1$，解得 $x=0.06$，
故这 100 名男学生中身高在 170 cm 及以上的学生人数为 $100\times 5\times(0.06+0.04+0.02)=60$.
(2)这 100 名男学生中，身高位于$[180,185]$内的频率为 $5\times 0.02=0.1$，身高位于$[175,180)$内的频率为 $5\times 0.04=0.2$，所以这 100 名男学生身高的 75%分位数位于$[175,180)$内. 设这 100 名男学生身高的 75%分位数为 x，则 $0.04\times(180-x)+0.1=0.25$，解得 $x=176.25$，故估计这 100 名男学生身高的 75%分位数为 176.25.

15. AC 【解析】对于 A，2018 年至 2022 年全国快递业务量逐年增长，故 A 正确；对于 B，$5\times 40\%=2$，所以 40%分位数为 $\frac{26.6\%+25.3\%}{2}=25.95\%$，故 B 错误；对于 C，$5\times 45\%=2.25$，所以 45%分位数为 26.6%，故 C 正确；对于 D，2017 年全国快递业务量为 $507.1\div(1+26.6\%)\approx 400.6$(亿件)，大于 400 亿件，故 D 错误. 故选 AC.

16. 解：(1)$\because 2\times(0.005+0.005+0.04+0.29+a+0.03+0.015+0.005)=1$，$\therefore a=0.11$.
(2)设第 60 百分位数为 m，则 $0.005\times 2+0.005\times 2+0.04\times 2+(m-8)\times 0.29=0.6$，解得 $m\approx 9.72\approx 10$，$\therefore$步数达到 10 千步者可以获得奖励.
(3)作为统计的量只能对结果进行估计，不能给出肯定的判断，故该部门的所有员工都属于前 40%是可能的，但并不是一定的.

9.2.3 总体集中趋势的估计

1. A 【解析】众数是在一组数据中出现次数最多的数，所以一定会在原始数据中出现.

2. B 【解析】将这 10 位选手的得分从小到大排列为 6，7，7，8，8，8，8，9，9，10，可知中位数为 8，且 8 出现的次数最多，故众数为 8. 故选 B.

3. D 【解析】由题意得 $\frac{x_1+x_2+x_3+x_4+x_5}{5}=3$，故 $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=15$，则 $\frac{3x_1+1+3x_2+1+3x_3+1+3x_4+1+3x_5+1}{5}=\frac{3(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5)+5}{5}=\frac{3\times 15+5}{5}=10$. 故选 D.

4. C 【解析】若这 100 个数都是 8，则这 100 个数据的中位数是 8，故 A 错误；因为 100 为偶数，所以把这 100 个数据从小到大排列后，第 50 和第 51 个数据的平均数为中位数，故 C 正确，B，D 错误. 故选 C.

5. A 【解析】众数是最高矩形的中点横坐标，因此众数在第二组的中点处. 因为直方图在右边拖尾，所以平均数大于中位数，又中位数左边和右边的矩形面积之和相等，所以中位数在第二组右边，因此有众数<中位数<平均数. 故选 A.

6. D 【解析】由题意得 $(0.005+0.03+a+0.015)\times 10=1$，解得 $a=0.05$，因为 $0.05+0.3=0.35$，$0.05+0.3+0.5=0.85$，$0.35<0.75<0.85$，所以样本数据的 75%分位数 x 位于$[80,90)$内，则 $0.35+(x-80)\times 0.05=0.75$，解得 $x=88$. 因为样本数据中位于$[80,90)$内的频率最大，所以众数 $y=\frac{80+90}{2}=85$，故选 D.

7. D 【解析】由 $4\times(0.01+0.075+a+0.045+0.03+0.02+0.01)=1$，可得 $a=0.06$，所以 $S_{矩形ABCD}=4\times 0.06=0.24$，故 A 中说法正确；估计该市居民月均用水量的众数为 $\frac{4+8}{2}=6$(t)，故 B 中说法正确；估计该市居民月均用水量不超过 19 t 的频率为 $4\times(0.01+0.075+0.06+0.045)+\frac{19-16}{4}\times 4\times 0.03=0.76+0.09=0.85$，故 C 中说法正确；设这 200 户居民月均用水量的中位数为 x_1，因为第一个矩形的面积为 0.04，第二个矩形的面积为 0.3，第三个矩形的面积为 0.24，所以中位数 $x_1\in[8,12]$，由 $x_1=8+\frac{0.5-4\times 0.01-4\times 0.075}{4\times 0.06}\times 4=8+\frac{8}{3}=\frac{32}{3}$，可估计这 200 户居民月均用水量的中位数为 $\frac{32}{3}$t，估计这 200 户居民月均用水量的平均数 $\overline{x}=4\times 0.01\times 2+4\times 0.075\times 6+4\times 0.06\times 10+4\times 0.045\times 14+4\times 0.03\times 18+4\times 0.02\times 22+4\times 0.01\times 26=11.76$(t)，因为 $\frac{32}{3}<11<11.76$，所以估计这 200 户居民月均用水量的中位数小于平均数，故 D 中说法不正确. 故选 D.

8. BCD 【解析】把这 10 个人的年龄从小到大排列为 28，29，29，32，32，32，36，40，40，45，易知这组数据的中位数为 32，众数为 32，故 A 错误，B 正确；由 $25\%\times 10=2.5$，得这组数据的第 25 百分位数是第 3 个数，为 29，故 C 正确；这组数据的平均数 $\overline{x}=\frac{28+2\times 29+3\times 32+36+2\times 40+45}{10}=34.3$，故 D 正确. 故选 BCD.

9. BD 【解析】对于 A，因为分数在$[60,70]$内的频率为 1－

$10\times(0.005+0.020+0.030+0.025+0.010)=0.10$，所以第三组的频数为 $100\times0.10=10$，故 A 错误；对于 B，由图可估计样本的众数为 75 分，故 B 正确；对于 C，因为 $10\times(0.005+0.020+0.010)=0.35<0.5$，$10\times(0.005+0.020+0.010+0.030)=0.65>0.5$，所以中位数位于[70,80]内，设中位数为 x，则 $0.35+0.03(x-70)=0.5$，解得 $x=75$，所以估计样本的中位数为 75 分，故 C 错误；对于 D，估计样本的平均数为 $(45\times0.005+55\times0.020+65\times0.010+75\times0.030+85\times0.025+95\times0.010)\times10=73$(分)，故 D 正确，故选 BD.

10. 67 **[解析]** 数据 65,67,64,60,65,67,67,66,64,62 中，出现次数最多的数据是 67，即众数为 67.

11. 95 **[解析]** 设 20 名女生的平均成绩为 $\overline{x}$，由题意得 $50\times92=30\times90+20\times\overline{x}$，解得 $\overline{x}=95$(分).

12. 105 $\frac{310}{3}$ **[解析]** 由题图，估计这批树木的底部周长的众数是 $\frac{100+110}{2}=105$(cm)，中位数是 $\frac{0.5-0.015\times10-0.025\times10}{0.03}+100=\frac{10}{3}+100=\frac{310}{3}$(cm).

13. **解：**(1)若 x 为这组数据的一个众数，则 x 的可能取值为 164,165,168,170，
即 x 的取值集合为{164,165,168,170}.
(2)因为样本数据的第 90 百分位数是 173，且 $20\times90\%=18$，
所以样本数据的第 90 百分位数为 $\frac{x+174}{2}=173$，
所以 $x=172$.
(3)若 $x=174$，则估计该校高一年级新生的平均身高为
$\frac{1}{20}\times(152+155+158+164+164+165+165+165+166+167+168+168+169+170+170+170+171+174+174+175)=166.5$(cm).

14. **解：**(1)$\overline{x}=\frac{1+3+4\times2+5+6\times2+7\times3}{10}=5$，
$s^2=\frac{1}{10}\times[(1-5)^2+(3-5)^2+2\times(4-5)^2+(5-5)^2+2\times(6-5)^2+3\times(7-5)^2]=3.6$.
(2)①这 600 名果切消费者中年龄不低于 35 岁的人数为 $(0.015+0.005)\times10\times600=120$.
②由 $0.020\times10=0.2<0.5$，$(0.020+0.035)\times10=0.55>0.5$，可得 $15<a<25$，所以 $0.20+(a-15)\times0.035=0.5$，解得 $a=\frac{0.3}{0.035}+15\approx24$，
所以估计这 600 名果切消费者年龄的中位数约为 24 岁.
估计这 600 名果切消费者年龄的平均数 $\overline{\omega}=10\times0.020\times10+20\times0.035\times10+30\times0.025\times10+40\times0.015\times10+50\times0.005\times10=25$(岁).

15. (1)23.55 cm 23.5 cm 23.5 cm (2)尺寸为 23.5 cm 的鞋销量最好，厂家应多生产 **[解析]** (1)30 双鞋尺寸的平均数 $\overline{x}=\frac{1}{30}\times(22\times1+22.5\times2+23\times4+23.5\times14+24\times5+24.5\times3+25\times1)=23.55$(cm). 由于尺寸小于 23.5 cm 的销售量为 $1+2+4=7$(双)，尺寸大于 23.5 cm 的销售量为 $5+3+1=9$(双)，故将 30 个数据按从小到大的顺序排列，处于正中间位置的两个数据均为 23.5，从而中位数为 23.5 cm. 因为数据 23.5 共出现 14 次，出现次数最多，所以众数也为 23.5 cm.
(2)尺寸为 23.5 cm 的鞋销量最好，厂家应多生产.

16. **解：**(1)因为甲社区 10 人的积分中出现次数最多的数据为 83，所以 $b=83$.
由乙社区 10 人的积分等级扇形图可得，乙社区 10 人的积分在 A 组的人数为 $10\times10\%=1$，在 B 组的人数为 $10\times20\%=2$，因为乙社区 10 人的积分在 C 组中的积分为 81,83,84,84，所以乙社区 10 人的积分从小到大排列后的第 5 和第 6 个数据分别为 83,84，
所以 $a=\frac{1}{2}\times(83+84)=83.5$.
因为乙社区 10 人的积分在 D 组的人数为 $10-1-2-4=3$，所以 D 组人数所占的百分比为 $\frac{3}{10}\times100\%=30\%$，所以 $m=30$.
(2)乙社区在此次垃圾分类换积分活动中表现更好，理由如下：
因为虽然甲、乙两个社区积分的平均数相同，但是乙社区的中位数和众数均比甲社区高，所以乙社区在此次垃圾分类换积分活动中表现更好.
(3)在样本中，甲社区积分在 80 分及以上的人数所占的比例为 $\frac{6}{10}=0.6$，乙社区积分在 80 分及以上的人数所占的比例为 $\frac{7}{10}=0.7$，所以估计 4 月份甲、乙两个社区积分在 80 分及以上的人数为 $0.6\times700+0.7\times800=980$.

9.2.4 总体离散程度的估计

1. B **[解析]** 这个样本的平均数 $\overline{x}=\frac{1}{5}\times(1+2+3+4+5)=3$，标准差 $s=\sqrt{\frac{1}{5}\times[(1-3)^2+(2-3)^2+(3-3)^2+(4-3)^2+(5-3)^2]}=\sqrt{2}$.

2. B **[解析]** 标准差能反映一组数据的稳定程度，故选 B.

3. D **[解析]** 对于 A，平均数为 $\frac{7+8+9+10+6+8}{6}=8$，故 A 中说法正确；对于 B，极差为 $10-6=4$，故 B 中说法正确；对于 C，数据从小到大排序后为 6,7,8,8,9,10，中位数为 $\frac{8+8}{2}=8$，故 C 中说法正确；对于 D，方差为 $\frac{1}{6}\times[(7-8)^2+(8-8)^2+(9-8)^2+(10-8)^2+(6-8)^2+(8-8)^2]=\frac{5}{3}$，故 D 中说法不正确，故选 D.

4. D **[解析]** 因为样本数据 $x_1,x_2,\cdots,x_{2024}$ 的平均数和方差分别为 3 和 56，$y_i=2x_i+3(i=1,2,\cdots,2024)$，所以 $y_1,y_2,\cdots,y_{2024}$ 的平均数为 $2\times3+3=9$，方差为 $2^2\times56=224$. 故选 D.

5. B **[解析]** 由题意，估计高一、高二学生日阅读时间的平均数 $\overline{x}=50\times\frac{40}{100}+40\times\frac{60}{100}=44$(分钟)，方差 $s^2=[4+(50-44)^2]\times\frac{40}{100}+[6+(40-44)^2]\times\frac{60}{100}=29.2$. 故选 B.

6. C **[解析]** 设班级人数为 $n(n>0)$，因为 $118+103+129=137+115+98$，所以更正前后平均分不变，且 $(118-125)^2+(103-125)^2+(129-125)^2=549<(137-125)^2+(115-125)^2+(98-125)^2=973$，所以 $s_1^2<s_2^2$. 故选 C.

7. A **[解析]** 由统计图知，甲同学成绩的波动幅度最小，丙同学成绩的波动幅度最大，所以 $s_1^2<s_2^2<s_3^2$，故选 A.

8. AD **[解析]** 去掉一个最低评分和一个最高评分后剩下评分的平均数有可能变小，不变或变大，故 A 中结论错误；剩下评分的极差一定会变小，故 B 中结论正确；剩下评分的波动性变小，则方差变小，故 C 中结论正确；剩下评分的中位数不变，故 D 中结论错误. 故选 AD.

9. BC **[解析]** 由折线图可得，甲一星期内的日步数从小到大排列为 11 000，11 800，12 200，12 600，13 500，15 400，18 200，所以中位数为 12 600；由折线图可得，乙一星期内的日步数从小到大排列为 11 800，12 200，12 400，12 600，13 000，13 800，14 000，所以中位数为 12 600. 故这一星期内甲、乙的日步数的中位数都为 12 600，A 错误；这一星期内甲的日步数的平均数为为 $\frac{1}{7}\times(11\ 000+11\ 800+12\ 200+12\ 600+13\ 500+15\ 400+18\ 200)=\frac{94\ 700}{7}$，这一星期内乙的日步数的平均数为 $\frac{1}{7}\times(11\ 800+12\ 200+12\ 400+12\ 600+13\ 000+13\ 800+14\ 000)=\frac{89\ 800}{7}$，因为 $\frac{94\ 700}{7}>\frac{89\ 800}{7}$，故 B 正确；由折线图知，甲的波动程度较大，故方差较大，标准差较大，故 C 正确；乙一星期内的日步数从小到大排列为

11 800,12 200,12 400,12 600,13 000,13 800,14 000,因为 $7\times0.75=5.25$,所以这一星期内乙的日步数的 75%分位数是 13 800,故 D 错误.故选 BC.

10. 10 **[解析]** 一组数据的方差是 4,将这组数据中的每个数据都乘 5,所得到的新数据的方差是 $5^2\times4=100$,故所得新数据的标准差为 10.

11. 11 **[解析]** 根据题意,设样本数据 a_1,a_2,a_3,a_4,a_5 的平均数为 $\overline{x}$,其方差 $s^2=\frac{1}{5}[(a_1-\overline{x})^2+(a_2-\overline{x})^2+(a_3-\overline{x})^2+(a_4-\overline{x})^2+(a_5-\overline{x})^2]=\frac{1}{5}(a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2+a_5^2-2a_1\overline{x}-2a_2\overline{x}-2a_3\overline{x}-2a_4\overline{x}-2a_5\overline{x}+5\overline{x}^2)=\frac{1}{5}(a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2+a_5^2-5\overline{x}^2)$,又 $s^2=\frac{1}{5}(a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2+a_5^2-80)$,则有 $5\overline{x}^2=80$,解得 $\overline{x}=4$,则样本数据 $2a_1+3,2a_2+3,2a_3+3,2a_4+3,2a_5+3$ 的平均数为 $2\overline{x}+3=11$.

12. 167 40 **[解析]** 由题意可估计该旅行团游客身高的均值 $\overline{x}=\frac{400}{600}\times170+\frac{200}{600}\times161=167$,估计该旅行团游客身高的方差 $S^2=\frac{1}{600}\times\{400\times[18+(170-167)^2]+200\times[30+(161-167)^2]\}=40$.

13. 解:(1)甲种玉米苗株高的平均数 $\overline{x}_1=\frac{1}{5}\times(29+31+30+32+28)=\frac{1}{5}\times150=30(\text{cm})$,

乙种玉米苗株高的平均数 $\overline{x}_2=\frac{1}{5}\times(27+44+40+31+43)=\frac{1}{5}\times185=37(\text{cm})$,

$\therefore\overline{x}_1<\overline{x}_2$,故乙种玉米苗长得高.

(2)甲种玉米苗株高的方差 $s_1^2=\frac{1}{5}\times[(29-30)^2+(31-30)^2+(30-30)^2+(32-30)^2+(28-30)^2]=2$,

乙种玉米苗株高的方差 $s_2^2=\frac{1}{5}\times[(27-37)^2+(44-37)^2+(40-37)^2+(31-37)^2+(43-37)^2]=46$,

$\therefore s_1^2<s_2^2$,故甲种玉米苗长得齐.

14. 解:(1)这 12 名男生物理成绩的平均数为 $\overline{x}_1=\frac{1}{12}\times(68\times2+72\times4+76\times3+80\times2+88)=75$,

方差 $s_1^2=\frac{1}{12}\times[(68-75)^2\times2+(72-75)^2\times4+(76-75)^2\times3+(80-75)^2\times2+(88-75)^2]=\frac{89}{3}$.

(2)这 20 名学生物理成绩的平均数 $\overline{x}=\frac{12}{20}\overline{x}_1+\frac{8}{20}\overline{x}_2=\frac{3\times75+2\times70}{5}=73$,

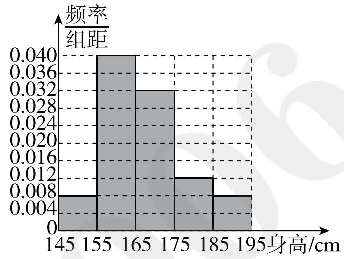
方差 $s^2=\frac{12}{20}[s_1^2+(\overline{x}_1-\overline{x})^2]+\frac{8}{20}[s_2^2+(\overline{x}_2-\overline{x})^2]=\frac{3}{5}\times\left[\frac{89}{3}+(75-73)^2\right]+\frac{2}{5}\times[23+(70-73)^2]=33$.

15. AD **[解析]** 设每天的空气质量指数为 $x_i(i=1,2,\cdots,10)$,10 天的空气质量指数的平均数为 $\overline{x}$,则方差为 $\frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}(x_i-\overline{x})^2$,对于 A,由 $\frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}(x_i-90)^2=10$,得 $\sum_{i=1}^{10}(x_i-90)^2=100$,若这 10 天中有 1 天的空气质量指数大于 100,则必有 $\sum_{i=1}^{10}(x_i-90)^2>100$,矛盾,所以这 10 天每天的空气质量指数都不大于 100,该地区的环境治理达标,故 A 正确;对于 B,假设有 8 天的空气质量指数为 50,有 1 天的空气质量指数为 140,有 1 天的空气质量指数为 60,此时平均数为 60,众数为 50,但该地区的环境治理不达标,故 B 错误;对于 C,假设第 1 天的空气质量指数为 120,后面 9 天的空气质量指数为 50,此时中位数为 50,极差为 70,但该地区的环境治理不达标,故 C 错误;对于 D,如果空气质量指数的最大值大于 100,根据极差为 20,则空气质量指数的最小值大于 80,这与 80%分位数为 80 矛盾,故最大值不大于 100,该地区的环境治理达标,故 D 正确.故选 AD.

16. 解:(1)因为身高在区间[185,195]内的频率为 $0.008\times10=0.08$,频数为 4,

所以 $n=\frac{4}{0.08}=50$,故 $m=0.008\times10\times50=4$,$p=0.04\times10\times50=20$,$q=50-4-20-6-4=16$,

所以身高在区间[165,175)内的频率为 $\frac{16}{50}=0.32$,在区间[175,185)内的频率为 $\frac{6}{50}=0.12$,由此可补充完整频率分布直方图:



由频率分布直方图可知,样本的平均数为 $150\times0.008\times10+160\times0.04\times10+170\times0.032\times10+180\times0.012\times10+190\times0.008\times10=12+64+54.4+21.6+15.2=167.2(\text{cm})$.

因此可估计该校高中生身高的平均数为 167.2 cm.

(2)把男生样本记为 $x_1,x_2,\cdots,x_{25}$,其平均数记为 $\overline{x}$,方差记为 s_x^2;把女生样本记为 $y_1,y_2,\cdots,y_{25}$,其平均数记为 $\overline{y}$,方差记为 s_y^2,则总样本平均数 $\overline{z}=\frac{25}{25+25}\overline{x}+\frac{25}{25+25}\overline{y}=\frac{25\times170+25\times160}{50}=165$.

因为 $\sum_{i=1}^{25}(x_i-\overline{x})=\sum_{i=1}^{25}x_i-25\overline{x}=0$,

所以 $\sum_{i=1}^{25}2(x_i-\overline{x})(\overline{x}-\overline{z})=2(\overline{x}-\overline{z})\sum_{i=1}^{25}(x_i-\overline{x})=0$,

同理可得 $\sum_{j=1}^{25}2(y_j-\overline{y})(\overline{y}-\overline{z})=0$,

所以总样本方差 $s^2=\frac{1}{50}\left[\sum_{i=1}^{25}(x_i-\overline{z})^2+\sum_{j=1}^{25}(y_j-\overline{z})^2\right]=\frac{1}{50}\left[\sum_{i=1}^{25}(x_i-\overline{x}+\overline{x}-\overline{z})^2+\sum_{j=1}^{25}(y_j-\overline{y}+\overline{y}-\overline{z})^2\right]=\frac{1}{50}\{25[s_x^2+(\overline{x}-\overline{z})^2]+25[s_y^2+(\overline{y}-\overline{z})^2]\}=\frac{1}{50}\times\{25\times[16+(170-165)^2]+25\times[20+(160-165)^2]\}=43$.

(3)两种方案总样本平均数的差为 $167.2-165=2.2$.

用方案二总样本的平均数作为总体平均数的估计不合适,原因:没有按照等比例进行分层随机抽样,每个个体被抽到的可能性不同,因此样本的代表性比较差.

滚动习题(八)

1. C **[解析]** 因为抽取 100 人进行调查,所以样本容量是 100.故选 C.

2. D **[解析]** 全面调查是对调查对象的所有单位一一进行调查的调查方式.对于 A,调查一个水库所有鱼中草鱼所占的比例,调查数目较多,不适合全面调查;对于 B,调查一批玉米种子的发芽率,调查数目较多,不适合全面调查;对于 C,调查一批炮弹的杀伤半径,调查数目较多,且具有破坏性,可以使用抽样调查;对于 D,调查一个县各村的粮食播种面积适合全面调查.故选 D.

3. C **[解析]** 这组数据有 10 个数,所以 $10\times30\%=3$,则该组数据的 30%分位数为 $\frac{17+a}{2}$,故 $\frac{17+a}{2}=19$,解得 $a=21$.故

选 C.

4. D 【解析】甲队员 10 次成绩(环数)由小到大排列为 8.4,8.6,8.8,9,9,9,9.2,9.2,9.4,9.4,对于 A 选项,甲的最高成绩是 9.4 环,A 中结论正确;对于 B 选项,甲的平均成绩为 $\frac{8.4+8.6+8.8+9\times3+9.2\times2+9.4\times2}{10}=9$(环),B 中结论正确;对于 C 选项,这组成绩的众数是 9 环,C 中结论正确;对于 D 选项,这组成绩的方差是 $s^2=\frac{1}{10}\times[(8.4-9)^2+(8.6-9)^2+(8.8-9)^2+3\times(9-9)^2+2\times(9.2-9)^2+2\times(9.4-9)^2]=0.096$,D 中结论错误.故选 D.

5. C 【解析】由题意得,甲的平均数为 $\frac{7+12+12+20+20+x+31}{6}=\frac{102+x}{6}$,乙的平均数为 $\frac{8+9+19+10+y+25+28}{6}=\frac{99+y}{6}$,而甲的中位数为 $\frac{12+20}{2}=16$,故乙的中位数为 $\frac{19+10+y}{2}=16$,解得 $y=3$,故 $\frac{102+x}{6}=\frac{99+y}{6}=17$,$\therefore x=0$,故选 C.

6. D 【解析】甲班学生物理成绩的众数为 79,乙班学生物理成绩的众数为 75,故选项 A 错误;$\because 0.020\times10+0.025\times10+0.030\times10=0.75$,$\therefore$乙班学生物理成绩的第 75 百分位数约为 80,故选项 B 错误;根据频数分布图知,甲班学生的物理成绩从小到大排序的第 10,11 个数分别是 79,79,故甲班学生物理成绩的中位数为 79,故选项 C 错误;甲班学生物理成绩的平均数为 $\frac{1}{20}\times(57\times2+58+59+67+68\times2+69\times2+79\times6+87+88\times2+89+98)=74.8$,乙班学生物理成绩的平均数的估计值为$(55\times0.020+65\times0.025+75\times0.030+85\times0.020+95\times0.005)\times10=71.5$,故甲班学生物理成绩的平均数大于乙班学生物理成绩的平均数的估计值,故选项 D 正确.故选 D.

7. B 【解析】设安全出口 S_k 每秒可疏散的人数为 $x_k(1\leqslant k\leqslant5)$,由题意可得 $\begin{cases}120(x_1+x_2)=1000,\\220(x_2+x_3)=1000,\\160(x_3+x_4)=1000,\\140(x_4+x_5)=1000,\\200(x_1+x_5)=1000,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x_1+x_2=\frac{25}{3},\\x_2+x_3=\frac{50}{11},\\x_3+x_4=\frac{25}{4},\\x_4+x_5=\frac{50}{7},\\x_1+x_5=5.\end{cases}$ 因为 $(x_1+x_2)-(x_2+x_3)=x_1-x_3=\frac{25}{3}-\frac{50}{11}>0$,所以 $\mu(S_1)>\mu(S_3)$,所以①正确;因为 $(x_3+x_4)-(x_2+x_3)=x_4-x_2=\frac{25}{4}-\frac{50}{11}>0$,所以 $\mu(S_4)>\mu(S_2)$,所以②正确;因为 $(x_4+x_5)-(x_3+x_4)=x_5-x_3=\frac{50}{7}-\frac{25}{4}>0$,所以 $\mu(S_5)>\mu(S_3)$,所以③正确;因为 $x_5-x_4=(x_1+x_5)-(x_3+x_4)+(x_3-x_1)=(x_1+x_5)-(x_3+x_4)+(x_2+x_3)-(x_1+x_2)=5-\frac{25}{4}+\frac{50}{11}-\frac{25}{3}<0$,所以 $\mu(S_4)>\mu(S_5)$,所以④错误.故选 B.

8. BC 【解析】这 10 届中国队获得金牌数的极差为 $201-94=107$,A 错误;这 10 届中国队获得金牌数的平均数为 $\frac{1}{10}\times(94+183+125+129+150+165+199+151+132+201)=152.9<155$,B 正确;这 10 届中国队获得金牌数从小到大排列为 94,125,129,132,150,151,165,183,199,201,因为 $10\times75\%=7.5$,所以中国队获得金牌数的 75%分位数是 183,C 正确;因为 $10\times60\%=6$,所以中国队获得金牌数的 60%分位数为 $\frac{151+165}{2}=158$,D 错误.故选 BC.

9. BC 【解析】因为由频率分布直方图无法得出这组数据的最大值与最小值,所以这组数据的极差可能为 70,也可能为小于 70 的值,所以 A 错误;因为 $(a+0.008+2a+0.012+0.015+4a+0.030)\times10=70a+0.65=1$,解得 $a=0.005$,所以 B 正确;该校竞赛成绩的平均数的估计值 $\overline{x}=55\times0.005\times10+65\times0.008\times10+75\times0.012\times10+85\times0.015\times10+95\times0.030\times10+105\times4\times0.005\times10+115\times2\times0.005\times10=90.7$(分),所以 C 正确;设这组数据的第 30 百分位数为 m,则 $(0.005+0.008+0.012)\times10+(m-80)\times0.015\times10=0.3$,解得 $m=\frac{241}{3}$,所以 D 错误.故选 BC.

10. 10 【解析】高一年级教师所占的比例为 $\frac{80}{80+72+88}=\frac{1}{3}$,则高一年级应抽取的教师人数为 $30\times\frac{1}{3}=10$.

11. 5(或 4 或 6 或 7) 【解析】要使得中位数是 7,则 a 必须插在 7 的前面,即 $a\leqslant7$,平均数为 $\frac{1}{9}\times(2+3+6+a+7+8+10+11+13)>7$,解得 $a>3$,$\because a\in\mathbf{N}$,$\therefore a$ 的值可以为 4,5,6,7.

12. 30 【解析】依题意得,$10\times(0.020+0.024+0.036+x+0.008)=1$,解得 $x=0.012$,所以成绩在$[80,90)$内的人数为 $50\times\frac{0.012}{0.020}=30$.

13. (1)现在的初中生"追星"多数以偶像派影视歌星为主,一些有真才实学的演艺人员以及对人类社会有卓越贡献的中外名人却遭受冷落

(2)家长和老师应予以正确引导

14. **解**:由表可以分别计算出 5 位运动员前 7 场比赛积分的平均数和标准差,作为判断各运动员比赛的成绩及稳定情况的依据,结果如表:

排名	运动员	积分平均数	积分标准差
1	甲	3.14	1.73
2	乙	4.57	2.77
3	丙	5.00	2.51
4	丁	6.29	3.19
5	戊	6.57	3.33

从表中可以看出:运动员甲的比赛积分的平均数及标准差都比其他运动员的小,也就是说,在前 7 场的比赛过程中,他的成绩最为优异,而且表现也最为稳定.

尽管此时还有 4 场比赛没有进行,但可以假定每位运动员在各自的 11 场比赛中发挥的水平大致相同(实际情况也确实如此),因而可以把前 7 场比赛的成绩作为总体的一个样本,并由此估计每位运动员最后比赛的成绩.所以,有足够的理由相信运动员甲在后面的 4 场比赛中会继续保持优异而稳定的成绩,获得最后的胜利.

15. **解**:(1)由题可得 $10\times(0.01+0.025+a+0.02+0.01)=1$,解得 $a=0.035$.

(2)因为 $10\times(0.01+0.025)=0.35<0.5$,$10\times(0.01+0.025+0.035)=0.7>0.5$,

所以中位数位于第三组$[75,85)$中,

设中位数为 x,则 $0.1+0.25+0.035\times(x-75)=0.5$,

解得 $x=75+\frac{0.15}{0.035}\approx79.3$,所以估计该用户红灯等待时间的中位数约为 79.3 秒.

(3)由题意,红灯等待时间低于 85 秒的频率为 $0.1+0.25+0.35=0.7$,故估计该用户在接下来的 10 次出行中红灯等待时间低于 85 秒的次数为 $10\times0.7=7$.

16. **解**:(1)由$(2\times0.002\,5+2a+0.035+0.04)\times10=1$,解得 $a=0.01$.日销售量不少于 100 个的频率为$(0.01+0.002\,5)\times10=0.125$,则估计该面包店去年三明治日销售量不少于 100 个的天数为 $360\times0.125=45$.

(2)由题图知,平均数 $\overline{x}=(65\times0.002\,5+75\times0.01+85\times0.04+95\times0.035+105\times0.01+115\times0.002\,5)\times10=89.75$,故估计该面包店去年三明治日销售量的平均数为 89.75 个.

(3)设三明治日销售量的 70%分位数为 m,[60,90)对应的频率 0.525<0.7,[60,100)对应的频率 0.875>0.7,故 $m\in[90,100)$.

由 $0.7-0.525=0.175$,得 $90+\frac{0.175}{0.035}=95$,故估计每天应该制作 95 个三明治.

第十章 概率

10.1 随机事件与概率

10.1.1 有限样本空间与随机事件

1. D **[解析]** 由定义知 A,B,C 中说法均正确.因为随机事件是样本空间的子集,所以由子集的定义可知 D 中说法错误.故选 D.
2. B **[解析]** ①④是随机事件,②为必然事件,③为不可能事件.故选 B.
3. B **[解析]** 从 4 名男生,2 名女生中随机抽取 3 人,有可能 2 名女生、1 名男生,2 名男生、1 名女生,也有可能 3 人全是男生,所以只有选项 B 是必然事件.故选 B.
4. B **[解析]** 由题知 $A=\{1,3,5\}$.
5. B **[解析]** 从 A,B,C,D,E 五人中选两人,不同的选法有 $(A,B),(A,C),(A,D),(A,E),(B,C),(B,D),(B,E),(C,D),(C,E),(D,E)$,所以样本空间中样本点的个数为 10.故选 B.
6. B **[解析]** 对于①,因为 $A\subseteq B,x\in A$,所以 $x\in B$,因此“若任取 $x\in A$,则 $x\in B$”是必然事件,故①正确;对于②,当集合 A 是集合 B 的真子集时,显然存在一个元素在集合 B 中,不在集合 A 中,因此“若 $x\notin A$,则 $x\in B$”是随机事件,故②错误;对于③,任取 $x\in B$,当集合 A 是集合 B 的真子集时,$x\in A$ 有可能成立,也可能不成立,因此“若任取 $x\in B$,则 $x\in A$”是随机事件,故③正确;对于④,因为 $x\notin B$,所以一定有 $x\notin A$,显然“若 $x\notin B$,则 $x\notin A$”是必然事件,故④正确.故选 B.
7. D **[解析]** 从三种颜色的 6 个变形金刚中随机取出 2 个,样本点共有 15 个,即(红 1,红 2),(红 1,白 1),(红 1,白 2),(红 1,黑 1),(红 1,黑 2),(红 2,白 1),(红 2,白 2),(红 2,黑 1),(红 2,黑 2),(白 1,白 2),(白 1,黑 1),(白 1,黑 2),(白 2,黑 1),(白 2,黑 2),(黑 1,黑 2).其中,恰好有 2 个红色的变形金刚包含的样本点为(红 1,红 2),恰好有 2 个黑色的变形金刚包含的样本点为(黑 1,黑 2),恰好有 2 个白色的变形金刚包含的样本点为(白 1,白 2),而至少有 1 个红色变形金刚包含的样本点不唯一,故 D 不是基本事件.故选 D.
8. AD **[解析]** 对于 A,小明上学路上通过的 5 个路口都碰到绿灯,这件事可能发生,也可能不会发生,是随机事件,故 A 符合题意;对于 B,地球每天都在自转从而使得昼夜更替,这是必然事件,故 B 不符合题意;对于 C,客观事实是太阳从东边升起,所以太阳从西边升起是不可能事件,故 C 不符合题意;对于 D,明天有可能会下雨,也可能不会下雨,所以明天会下雨是随机事件,故 D 符合题意.故选 AD.
9. AB **[解析]** 在 25 件同类产品中,有 2 件次品,从中任取 5 件产品,“5 件都是正品”“至少有 1 件次品”,都是随机事件,A,B 正确;在 25 件同类产品中,有 2 件次品,所以不可能取出 3 件次品,则“有 3 件次品”是不可能事件,C 错误;在 25 件同类产品中,有 2 件次品,从中取 5 件,则“至少有 3 件正品”为必然事件,D 错误.故选 AB.
10. {(男,男),(男,女),(女,男),(女,女)} **[解析]** 两个小孩有年龄大小之分,所以样本空间 Ω 有 4 个样本点,即(男,男),(女,男),(男,女),(女,女),所以 $\Omega=${(男,男),(男,女),(女,男),(女,女)}.
11. 取出的两件产品都是正品　取出的两件产品中恰有一件次品
12. 10　4 **[解析]** 从 1,2,3,4,5 中随机取三个不同的数有(1,2,3),(1,2,4),(1,2,5),(1,3,4),(1,3,5),(1,4,5),(2,3,4),(2,3,5),(2,4,5),(3,4,5),共 10 个样本点,其中(1,2,4),(1,3,5),(2,3,4),(2,4,5)中三个数之和为奇数.
13. **解:**结合必然事件、不可能事件、随机事件的定义可知,(1)是必然事件,(3)(5)是不可能事件,(2)(4)是随机事件.
14. **解:**(1)$A=\{(b_1,\omega_1),(b_1,\omega_2),(b_1,\omega_3),(b_2,\omega_1),(b_2,\omega_2),(b_2,\omega_3),(b_1,b_2),(b_2,b_1)\}$,$B=\{(b_1,\omega_1),(b_1,\omega_2),(b_1,\omega_3),(b_2,\omega_1),(b_2,\omega_2),(b_2,\omega_3),(b_1,b_2),(b_2,b_1),(\omega_1,b_1),(\omega_1,b_2),(\omega_2,b_1),(\omega_2,b_2),(\omega_3,b_1),(\omega_3,b_2)\}$.

    (2)①事件 C 的含义是“两次摸出的都是白球”.

    ②事件 D 的含义是“摸出的 2 个球是 1 个黑球和 1 个白球”.

    ③事件 E 的含义是“第一次摸出的是白球,第二次摸出的是黑球”.
15. (红,红,红),(红,红,黑),(红,黑,红),(黑,红,红)

    [解析]“顾客获奖”就是顾客得分为 5 分或 6 分,即 3 次摸到三个红球或两个红球和一个黑球,因此事件 A 包含的样本点为(红,红,红),(红,红,黑),(红,黑,红),(黑,红,红).
16. **解:**(1)点 M 在 y 轴上,即 $a=0$,b 的可能取值为 6,7,8,9,所以集合 $A=\{(0,6),(0,7),(0,8),(0,9)\}$.

    (2)由题知 $a^2+(b-6)^2\leqslant 9$.

    当 $a=0$ 时,$b=6,7,8,9$,满足 $a^2+(b-6)^2\leqslant 9$;

    当 $a=1$ 时,$b=6,7,8$,满足 $a^2+(b-6)^2\leqslant 9$;

    当 $a=2$ 时,$b=6,7,8$,满足 $a^2+(b-6)^2\leqslant 9$;

    当 $a=3$ 时,$b=6$,满足 $a^2+(b-6)^2\leqslant 9$.

    故 $B=\{(0,6),(0,7),(0,8),(0,9),(1,6),(1,7),(1,8),(2,6),(2,7),(2,8),(3,6)\}$.

10.1.2 事件的关系和运算

1. C **[解析]** 由题图知,事件 A 与事件 B 不能同时发生,且 $A\cup B\neq\Omega$,因此 A 与 B 互斥而不对立,故选 C.
2. C **[解析]** $\{2,4,8\}\cap\{4,6,8\}=\{4,8\}$,故选 C.
3. C **[解析]** 同时抛掷两枚质地均匀的硬币,其样本空间 $\Omega=${(正,正),(正,反),(反,正),(反,反)},其中事件 $A=${(正,正)},事件 $B=${(正,正),(正,反),(反,正)},所以 $A\subseteq B$.故选 C.
4. C **[解析]** 由题图可知,该段电路没有故障,即甲没有故障,乙也没有故障,所以表示该段电路没有故障的事件为 $\overline{M}\cap\overline{N}$.故选 C.
5. C **[解析]** 根据对立事件的概念,连续射击 2 次,事件“至少有 1 次中靶”的对立事件是“2 次都不中靶”.故选 C.
6. B **[解析]** $\overline{A}\cap B$ 表示“点数为 2”,$A\cap\overline{B}$ 表示“点数为 5”,$\overline{A}\cup B$ 表示“点数为 1 或 2 或 3 或 4 或 6”,$A\cup\overline{B}$ 表示“点数为 1 或 3 或 4 或 5 或 6”,故选 B.
7. C **[解析]** 由题意,样本空间 $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$,而事件 $A=\{3,4,5,6\}$,“掷出的点数为偶数”包含的样本点为 2,4,6,与 A 不互斥,“掷出的点数为奇数”包含的样本点为 1,3,5,与 A 不互斥,“掷出的点数小于 2”包含的样本点为 1,与 A 互斥且不对立,“掷出的点数小于 3”包含的样本点为 1,2,与 A 对立.故选 C.
8. ACD **[解析]** 对于 A,事件 $B\cup C$ 为“至多一人中奖”,即“至少一人没中奖”,所以 $B\cup C=D$,故 A 正确;对于 B,事件 $A\cap C$ 表示两人都中奖且恰有一人中奖,为不可能事件,所以 $A\cap C=\varnothing$,故 B 错误;对于 C,至少一人没中奖包括恰有一人中奖和两人都没中奖两种情况,所以 $C\subseteq D$,故 C 正确;对于 D,由 C 选项可知 $B\subseteq D$,所以 $B\cap D=B$,故 D 正确.故选 ACD.
9. AD **[解析]** 对于 A,事件 C,E 均表示“选出的两个人是一个男生和一个女生”,则 $C=E$ 成立,故 A 正确;对于 B,事件 $A=$“选出的两个人是一个男生和一个女生或者两个人都是女生”,事件 $B=$“选出的两个人是一个男生和一个女生或者两个人都是男生”,则 $A=B$ 不成立,故 B 错误;对于 C,事件 D,E 包含的样本点都不相同,则 $D\cap E=\varnothing$,故 C 错误;对于 D,事件 B,D 包含的样本点都不相同,则 $B\cap D=\varnothing$,事件 $B=$“选出的两个人是一个男生和一个女生或者两个人都是男生”,事件 $D=$“选出的两个人都是女生”,则 $B\cup D$ 包含了样本空间中所有的样本点,$\therefore B\cup D=\Omega$,故 D 正确.故选 AD.
10. (1)$\subseteq$　(2)$\subseteq$　(3)$\subseteq$　(4)$=$　(5)A　B　C　D　(6)I

    [解析] 因为事件 A,B,C,D 发生时,事件 H 必然发生,故 $B\subseteq H$,同理 $D\subseteq J$,$E\subseteq I$,易知事件 A 与事件 G 相等,即 $A=G$.因为 $H=\{1,2,3,4\}$,$A=\{1\}$,$B=\{2\}$,$C=\{3\}$,$D=$

{4},所以 $H=A\cup B\cup C\cup D$,即 $H=A+B+C+D$,同理 $A+C+E=I$.

11. 第一次和第二次射击都击中目标,第三次射击没有击中目标　第一次和第二次射击都没有击中目标　**[解析]** $A_1\cap A_2\cap \overline{A_3}$ 表示第一次和第二次射击都击中目标,第三次射击没有击中目标,$\overline{A_1\cup A_2}$ 表示第一次和第二次射击都没有击中目标.

12. ①②　**[解析]** 事件 $A\cup B$="至少有一件次品",即事件 C,所以①正确;事件 $A\cap B=\varnothing$,所以③不正确;事件 $D\cup B$ 表示至少有两件次品或至多有一件次品,包含了所有样本点,所以②正确;事件 $A\cap D$ 表示恰有一件次品,即事件 A,所以④不正确.故填①②.

13. **解**:(1)甲未中靶:$\overline{A}$.
(2)甲中靶而乙未中靶:$A\cap\overline{B}$,即 $A\overline{B}$.
(3)三人中只有丙未中靶:$A\cap B\cap\overline{C}$,即 $AB\overline{C}$.
(4)三人中至少有一人中靶:$\overline{\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}}$.
(5)三人中恰有两人中靶:$(AB\overline{C})\cup(A\overline{B}C)\cup(\overline{A}BC)$.

14. **解**:(1)用数组(x_1,x_2)表示可能的结果,x_1 是第一次摸到的球的标号,x_2 是第二次摸到的球的标号,所以试验的样本空间 $\Omega=\{(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),(2,3),(2,4),(3,1),(3,2),(3,4),(4,1),(4,2),(4,3)\}$,事件 $R=\{(1,2),(2,1)\}$,事件 $G=\{(3,4),(4,3)\}$,事件 $M=\{(1,2),(2,1),(3,4),(4,3)\}$,事件 $N=\{(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,1),(4,1),(3,2),(4,2)\}$.
(2)由(1)知,$R\cap G=\varnothing$,而 $R\cup G\subseteq\Omega$,所以事件 R,G 互斥且不对立;$M\cap N=\varnothing$,$M\cup N=\Omega$,所以事件 M,N 互为对立事件.
(3)由(1)知,$R\cup G=M$,所以事件 M 是事件 R 与事件 G 的并事件.

15. ①$A+B+C$　②$AB\overline{C}+\overline{A}BC+A\overline{B}C$　**[解析]** ①至少订阅一种学习资料的事件即是事件 A 或事件 B 或事件 C 发生,故 $D=A+B+C$.②恰好订阅两种学习资料的事件包含订阅数学和语文学习资料的事件 $AB\overline{C}$,订阅语文和英语学习资料的事件$\overline{A}BC$,订阅数学和英语学习资料的事件 $A\overline{B}C$,它们彼此互斥,故 $E=AB\overline{C}+\overline{A}BC+A\overline{B}C$.

16. **解**:(1)用 1,2,3,4 表示 4 名男生,用 a,b 表示 2 名女生,因为事件 A_1="甲组有 1 名女生",所以 $A_1=\{(1,2,a),(1,2,b),(1,3,a),(1,3,b),(1,4,a),(1,4,b),(2,3,a),(2,3,b),(2,4,a),(2,4,b),(3,4,a),(3,4,b)\}$,共包含 12 个样本点.
(2)事件 B="甲组至少有一名女生",其含义是甲组有一名女生或甲组有两名女生,所以 $B=A_1\cup A_2$.
(3)因为 A_2 与 $A_0\cup A_1$ 是对立事件,所以 $\overline{A_2}=A_0\cup A_1$,所以 $\overline{A_2}\cup A_0=A_0\cup A_1$,所以事件 A_2 与事件 $\overline{A_2}\cup A_0$ 是对立事件.

10.1.3　古典概型

1. A　**[解析]** 古典概型满足两个条件:①有限性:样本空间的样本点只有有限个;②等可能性:每个样本点发生的可能性相等.对于 A,满足古典概型的两个条件,故 A 是古典概型;对于 B,由于一粒种子是否发芽的可能性不一定相同,∴不满足古典概型的等可能性,故 B 不是古典概型;对于 C,在平面直角坐标系内任取一点 P,观察点 P 是否在第一象限,样本空间的样本点有无数个,不满足古典概型的有限性,故 C 不是古典概型;对于 D,试验的样本空间的样本点有无数个,不满足古典概型的有限性,故 D 不是古典概型.故选 A.

2. C　**[解析]** 所有的样本点为(e,g,g),(g,e,g),(g,g,e),共有 3 个,故写对的概率为$\frac{1}{3}$.故选 C.

3. C　**[解析]** 随机抛掷两枚质地均匀的骰子,观察得到的点数,该试验的样本空间中样本点总数 $n=6\times6=36$.用事件 B 表示所得点数之和是 4 的倍数,则事件 B 包含的样本点有(1,3),(3,1),(2,2),(2,6),(6,2),(4,4),(3,5),(5,3),(6,6),共 9 个,故所求的概率为 $P(B)=\frac{9}{36}=\frac{1}{4}$.故选 C.

4. A　**[解析]** 依题意,甲、乙两人参加学习小组,样本空间中的样本点有$(A,A),(A,B),(A,C),(B,A),(B,B),(B,C),(C,A),(C,B),(C,C)$,共 9 个,两人参加同一个小组包含的样本点有$(A,A),(B,B),(C,C)$,共 3 个,∴两人参加同一个小组的概率 $P=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$.故选 A.

5. B　**[解析]** 不超过 12 的质数有 2,3,5,7,11,共 5 个,从这五个质数中随机选取两个不同的数包含的样本点有(2,3),(2,5),(2,7),(2,11),(3,5),(3,7),(3,11),(5,7),(5,11),(7,11),共 10 个,其中和为偶数包含的样本点有(3,5),(3,7),(3,11),(5,7),(5,11),(7,11),共 6 个,所以从不超过 12 的质数中,随机选取两个不同的数,其和为偶数的概率为$\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$.故选 B.

6. D　**[解析]** 根据题意,试验的样本点用(m,n)表示,则试验的样本空间 $\Omega=\{(6,6),(6,7),(6,8),(6,9),(7,6),(7,7),(7,8),(7,9),(8,6),(8,7),(8,8),(8,9),(9,6),(9,7),(9,8),(9,9)\}$,共包含 16 个样本点,$m,n$ 满足$|m-n|\leqslant1$ 包含的样本点有(6,6),(6,7),(7,6),(7,7),(7,8),(8,7),(8,8),(8,9),(9,8),(9,9),共 10 个,所以两人"心领神会"的概率是$\frac{10}{16}=\frac{5}{8}$.故选 D.

7. C　**[解析]** 设这两人为 A,B,则这两人离开电梯的样本空间 $\Omega=\{(A2,B2),(A2,B3),(A2,B4),(A2,B5),(A2,B6),(A3,B2),(A3,B3),(A3,B4),(A3,B5),(A3,B6),(A4,B2),(A4,B3),(A4,B4),(A4,B5),(A4,B6),(A5,B2),(A5,B3),(A5,B4),(A5,B5),(A5,B6),(A6,B2),(A6,B3),(A6,B4),(A6,B5),(A6,B6)\}$,共包含 25 个样本点.事件"两人在相同层离开电梯"包含$(A2,B2),(A3,B3),(A4,B4),(A5,B5),(A6,B6)$,共 5 个样本点,所以"两人在不同层离开电梯"共包含 20 个样本点,所求概率 $P=\frac{20}{25}=\frac{4}{5}$,故选 C.

8. AD　**[解析]** 根据古典概型的定义可知所有的基本事件之间都是"等概率事件",故 A 正确;抛掷一枚质地均匀的骰子一次,该试验的样本空间中样本点的个数为 6,且事件"奇数点朝上"和"偶数点朝上"是"等概率事件",但这两个事件都不是基本事件,故 B 错误;由题可知"等概率事件"是针对同一个古典概型的,故 C 错误;同时抛掷三枚质地均匀的硬币一次,则事件"恰有一个正面向上"的概率为$\frac{3}{8}$,"恰有两个正面向上"的概率为$\frac{3}{8}$,所以二者是"等概率事件",故 D 正确.故选 AD.

9. BCD　**[解析]** 由题意,样本空间 $\Omega=\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)\}$,共包含 9 个样本点.对于 A,取出的两个球上标号为不同数字的概率为$\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$,A 错误;对于 B,取出的两个球上标号之积能被 3 整除包含的样本点有(1,3),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3),共 5 个,所以所求概率为$\frac{5}{9}$,B 正确;对于 C,取出的两个球上标号为相同数字的概率为$\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$,C 正确;对于 D,甲盒中取出的球上标号比乙盒中取出的球上标号大包含的样本点有(2,1),(3,1),(3,2),共 3 个,所以甲盒中取出的球上标号比乙盒中取出的球上标号大的概率为$\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$,D 正确.故选 BCD.

10. {红球,白球,黑球}　**[解析]** 该随机试验的样本空间为{红球,白球,黑球}.

11. $\frac{1}{2}$　$\frac{3}{8}$　**[解析]** 若标签的选取是无放回的,则样本空间中的样本点有(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),(2,3),(2,4),(3,1),(3,2),(3,4),(4,1),(4,2),(4,3),共 12 个,其中,事件"两张标签上的数字为相邻整数"包含的样本点有(1,2),(2,1),(2,3),(3,2),(3,4),(4,3),共 6 个,所以两张标签上的

数字为相邻整数的概率为$\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$.若标签的选取是有放回的,则样本空间中的样本点有(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),共16个,其中,事件“两张标签上的数字为相邻整数”包含的样本点有(1,2),(2,1),(2,3),(3,2),(3,4),(4,3),共6个,所以两张标签上的数字为相邻整数的概率为$\frac{6}{16}=\frac{3}{8}$.

12. $\frac{2}{3}$ **【解析】** 由题意可知$7<BC<17$,从8,9,10,…,15,16这9个正整数中任选一个数作为边BC的长度,该试验的样本空间中共包含9个样本点.要使$\triangle ABC$为钝角三角形,需满足$5^2+BC^2-12^2<0$或$5^2+12^2-BC^2<0$,即$BC<\sqrt{119}$或$BC>13$,故BC的取值可以是8,9,10,14,15,16,共包含6个样本点,故$\triangle ABC$为钝角三角形的概率为$\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$.

13. 解:(1)由题意可知,所有可能的样本点共有16个,样本空间$\Omega=\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(4,1),(4,2),(4,3),(4,4)\}$.

(2)由题意可知,$A=\{(1,1),(1,2),(2,1)\}$,共包含3个样本点,故$P(A)=\frac{3}{16}$,$B=\{(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,4)\}$,共包含6个样本点,故$P(B)=\frac{6}{16}=\frac{3}{8}$,

事件AB包含的样本点只有(1,2)一个,故$P(AB)=\frac{1}{16}$.

14. 解:(1)甲校2名男教师分别用A,B表示,女教师用C表示;乙校男教师用D表示,2名女教师分别用E,F表示.

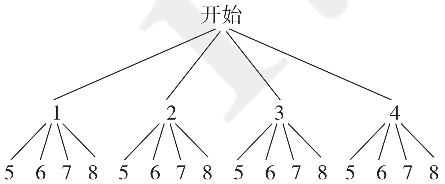
从甲校和乙校的教师中各任选1名的所有样本点为(A,D),(A,E),(A,F),(B,D),(B,E),(B,F),(C,D),(C,E),(C,F),共9个.

选出的2名教师性别相同包含的样本点有(A,D),(B,D),(C,E),(C,F),共4个,所以选出的2名教师性别相同的概率为$\frac{4}{9}$.

(2)从甲校和乙校的6名教师中任选2名包含的样本点为(A,B),(A,C),(A,D),(A,E),(A,F),(B,C),(B,D),(B,E),(B,F),(C,D),(C,E),(C,F),(D,E),(D,F),(E,F),共15个.

选出的2名教师来自同一学校包含的样本点有(A,B),(A,C),(B,C),(D,E),(D,F),(E,F),共6个.所以选出的2名教师来自同一学校的概率为$\frac{6}{15}=\frac{2}{5}$.

15. A **【解析】** 画树状图如图:



对于A,由树状图可知,共有16种等可能的结果,即样本空间包含的样本点个数为16,其中所确定的点在直线$y=x+4$上包含的样本点有(1,5),(2,6),(3,7),(4,8),共4个,所确定的点在直线$y=-x+8$上包含的样本点有(1,7),(2,6),(3,5),共3个,故两种情况下的样本点个数不一样,即两种情况下概率不一样,选项A中获胜规则不正确;对于B,由树状图可知,两个数乘积大于15包含的样本点有(2,8),(3,6),(3,7),(3,8),(4,5),(4,6),(4,7),(4,8),共8个,则两个数乘积不大于15包含的样本点也有8个,故两种情况下的样本点个数一样,即两种情况下概率一样,选项B中获胜规则正确;对于C,由树状图可知,取出的两个数差的绝对值是偶数包含的样本点有(1,5),(1,7),(2,6),(2,8),(3,5),(3,7),(4,6),(4,8),共8个,则取出的两个数差的绝对值是奇数包含的样本点也有8个,故两种情况下的样本点个数一样,即两种情况下概率一样,选项C中获胜规则正确;对于D,由树状图可知,取出的两个数相加,得到的和为奇数包含的样本点有(1,6),(1,8),(2,5),(2,7),(3,6),(3,8),(4,5),(4,7),共8个,则取出的两个数相加,得到的和为偶数包含的样本点也有8个,故两种情况下的样本点个数一样,即两种情况下概率一样,选项D中获胜规则正确.故选A.

16. 解:(1)甲盒中的3个红球记为a_1,a_2,a_3,2个白球记为b_1,b_2,从甲盒中按先后顺序随机取两个球,取后不放回,样本空间中每个样本点用(M,N)表示,其中M,N都取自5个球中的任意一个,且不能重复,

即对M的每一种情况,N都有4种不同的情况与之对应,

而M有5种不同的情况,列举可知共有$5\times4=20$(个)样本点.

取到的两个球都是白球包含的样本点有(b_1,b_2),(b_2,b_1),共2个,故至少取得一个红球的概率$P=\frac{18}{20}=\frac{9}{10}$.

(2)参考答案一:选择的是甲盒,理由如下:

在甲盒中摸到红球的概率是$\frac{3}{5}$,在乙盒中摸到红球的概率是$\frac{1}{5}$,在甲盒中摸到红球的概率大于乙盒,故选择的应该是甲盒,但这种判断并不能保证完全正确,也存在选择乙盒的可能性.

参考答案二:选择的是乙盒,理由如下:

在甲盒中摸到红球的概率是$\frac{3}{5}$,在乙盒中摸到红球的概率是$\frac{1}{5}$,在乙盒中摸到红球的概率较低,但是不为0,

所以存在选择乙盒的可能性,但这种判断并不能保证完全正确,也存在选择甲盒的可能性.

参考答案三:无法判断,理由如下:

在甲盒中摸到红球的概率是$\frac{3}{5}$,在乙盒中摸到红球的概率是$\frac{1}{5}$,

都是概率不为0的随机事件,都有可能发生,所以无法判断.

10.1.4 概率的基本性质(A)

1. A **【解析】** 由题意,可得$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$,所以$P(B)=0.3$,故选A.

2. C **【解析】** 设事件A=“取到红桃”,$P(A)=\frac{1}{4}$,则没有取到红桃是A的对立事件$\overline{A}$,故$P(\overline{A})=1-P(A)=\frac{3}{4}$.故选C.

3. C **【解析】** 因为$A\subseteq B$,所以$P(A\cap B)=P(A)=0.6$.故选C.

4. A **【解析】** 设“抽到甲级品”“抽到乙级品”“抽到丙级品”分别为事件A,B,C,则A,B,C两两互斥,且$A+B+C=\Omega$.因为“抽到甲级品”的概率为0.8,“抽到乙级品”的概率为0.15,所以“抽到丙级品”的概率为$1-0.8-0.15=0.05$.故选A.

5. A **【解析】** 设这个商店月收入在[10,15),[15,20),[20,25),[25,30)内的事件分别为A,B,C,D,因为事件A,B,C,D两两互斥,且$P(A)+P(B)+P(C)+P(D)=0.67$,$P(A)=0.12$,所以$P(B\cup C\cup D)=P(B)+P(C)+P(D)=0.67-0.12=0.55$.

6. C **【解析】** 由题知,$P(A)=\frac{12}{48}=\frac{1}{4}$,$P(B)=\frac{8}{48}=\frac{1}{6}$,因为$P(A\cup B)=\frac{1}{3}$,所以$P(A)+P(B)-P(AB)=\frac{1}{3}$,即$\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-P(AB)=\frac{1}{3}$,解得$P(AB)=\frac{1}{12}$.故选C.

7. C **【解析】** 密码全部由奇数组成且按照递增顺序排列的结果有(1,3,5,7),(1,3,5,9),(1,3,7,9,),(1,5,7,9),(3,5,7,9),共5个.设最多输入2次就能开锁为事件A,它是事件A_1=“输入1次就能开锁”与事件A_2=“第2次输入才能开锁”的和,A_1与A_2互斥,$P(A_1)=\frac{1}{5}$,$P(A_2)=\frac{4\times1}{5\times4}=\frac{1}{5}$,则$P(A)=P(A_1)+P(A_2)=\frac{2}{5}$,故最多输入2次就能开锁

的概率是$\frac{2}{5}$.

8. BCD 【解析】对于A,对立事件一定是互斥事件,故A中说法正确;对于B,当且仅当A与B互斥时才有$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$,故B中说法不正确;对于C,若事件A,B,C彼此互斥,则$P(A)+P(B)+P(C)\leqslant 1$,故C中说法不正确;对于D,若袋中有除颜色外完全相同的红、黄、黑、蓝四种颜色的小球各一个,从袋中任意摸出一个小球,设事件A="摸到红球或黄球",事件B="摸到黄球或黑球",则满足$P(A)=\frac{1}{2}$,$P(B)=\frac{1}{2}$,$P(A)+P(B)=1$,但事件A与B不互斥,也不对立,故D中说法不正确.故选BCD.

9. CD 【解析】由题图知,参加兴趣小组的共有$6+7+8+8+10+10+11=60$(人),只参加数学、英语、音乐小组的人数分别为10,6,8,故只参加音乐小组的概率为$\frac{8}{60}=\frac{2}{15}$,故A错误;只参加英语小组的概率为$\frac{6}{60}=\frac{1}{10}$,故B错误;"参加至少2个小组"包含"参加2个小组"和"参加3个小组"两种情况,故他参加至少2个小组的概率为$\frac{11+10+7+8}{60}=\frac{3}{5}$,故C正确;"参加不超过2个小组"包含"参加1个小组"和"参加2个小组",其对立事件是"参加3个小组",故他参加不超过2个小组的概率$P=1-\frac{8}{60}=\frac{13}{15}$,故D正确.故选CD.

10. 0.9 【解析】因为一次考试中,小明数学超过90分的概率是0.8,物理超过90分的概率是0.7,两门都超过90分的概率是0.6,所以他的数学和物理至少有一门超过90分的概率为$P=0.8+0.7-0.6=0.9$.

11. $\frac{2}{3}$ 【解析】设事件A="甲拿到白色鲜花",根据题意有红色、黄色、白色鲜花各1盆,分别赠送给甲、乙、丙三人,每人1盆,则甲、乙、丙三人拿到白色鲜花的概率相等,都为$\frac{1}{3}$,所以$P(A)=\frac{1}{3}$,则甲没有拿到白色鲜花的概率为$P(\overline{A})=1-P(A)=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$.

12. 25 【解析】由题意可知摸出黑球的概率是$1-0.4-0.35=0.25$,故共有$100\times 0.25=25$(个)黑球.

13. 解:设事件A="不派出医生",事件B="派出1名医生",事件C="派出2名医生",事件D="派出3名医生",事件E="派出4名医生",事件F="派出5名及5名以上医生",则事件A,B,C,D,E,F彼此互斥,且$P(A)=0.1$,$P(B)=0.18$,$P(C)=0.28$,$P(D)=0.19$,$P(E)=0.21$,$P(F)=0.04$.
(1)"派出医生至多2人"的概率为$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)=0.1+0.18+0.28=0.56$.
(2)方法一:"派出医生至少2人"的概率为$P(C\cup D\cup E\cup F)=P(C)+P(D)+P(E)+P(F)=0.28+0.19+0.21+0.04=0.72$.
方法二:"派出医生至少2人"的概率为$1-P(A\cup B)=1-0.1-0.18=0.72$.

14. 解:从该班随机抽取一名学生,设A="这名学生喜欢打羽毛球",B="这名学生喜欢打乒乓球",
则$P(A)=0.45$,$P(B)=0.8$,$P(AB)=0.3$.
(1)这名学生只喜欢打羽毛球的概率为$P(A\overline{B})=P(A)-P(AB)=0.45-0.3=0.15$.
(2)这名学生至少喜欢一种运动的概率为$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0.45+0.8-0.3=0.95$.
(3)这名学生只喜欢一种运动的概率为$P(A+B)-P(AB)=0.95-0.3=0.65$.
(4)这名学生两种运动都不喜欢的概率为$P(\overline{A+B})=1-P(A+B)=1-0.95=0.05$.

15. D 【解析】∵随机事件A,B互斥,A,B发生的概率均不等于0,且$P(A)=2-a$,$P(B)=4a-5$,∴$\begin{cases}0<P(A)<1,\\0<P(B)<1,\\P(A)+P(B)\leqslant 1,\end{cases}$即$\begin{cases}0<2-a<1,\\0<4a-5<1,\\3a-3\leqslant 1,\end{cases}$解得$\frac{5}{4}<a\leqslant\frac{4}{3}$,即$a\in\left(\frac{5}{4},\frac{4}{3}\right]$.故选D.

16. 解:(1)样本空间中包含的样本点是(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),共25个,其中$a+b=5$包含的样本点为(1,4),(2,3),(3,2),(4,1),共4个,
故由古典概型的概率计算公式可得$P(a+b=5)=\frac{4}{25}$.
(2)这种游戏规则不公平.理由如下:设事件A表示甲赢,事件B表示乙赢,则A,B为对立事件,由题意,事件A包含的样本点有(1,5),(2,4),(2,5),(3,3),(3,4),(3,5),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),共15个,由古典概型的概率计算公式可得$P(A)=\frac{15}{25}=\frac{3}{5}$,
∴$P(B)=1-P(A)=\frac{2}{5}$,∵$P(A)>P(B)$,∴这种游戏规则不公平.

10.1.4 概率的基本性质(B)

1. C 【解析】事件$\overline{A}\cap\overline{B}$与事件$A\cup B$是对立事件,所以$P(\overline{A}\cap\overline{B})=1-P(A\cup B)=1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$,故选C.

2. B 【解析】由题意,事件$\overline{B}$="向上的面大于或等于4的点数出现",即$\overline{B}=\{4,5,6\}$,$A=\{2,4\}$,故$A\cup\overline{B}=\{2,4,5,6\}$,故事件$A\cup\overline{B}$发生的概率为$\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$.故选B.

3. C 【解析】设事件A="两个球都是红球",事件B="两个球都是白球",事件C="两个球颜色不同",则$P(A)=\frac{2}{15}$,$P(B)=\frac{1}{3}$,且$\overline{C}=A\cup B$.因为事件A,B,C两两互斥,所以$P(C)=1-P(\overline{C})=1-P(A\cup B)=1-[P(A)+P(B)]=1-\frac{2}{15}-\frac{1}{3}=\frac{8}{15}$.故选C.

4. C 【解析】由$A\cup B$有16个样本点,且$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$,得$A\cap B$共有$10+8-16=2$(个)样本点,则$\overline{A}\cap B$有$8-2=6$(个)样本点,故$P(\overline{A}\cap B)=\frac{6}{18}=\frac{1}{3}$.故选C.

5. C 【解析】设事件A表示质量小于4.8 g,事件B表示质量不超过4.85 g,事件C表示质量在[4.8,4.85]范围内,则$A\cup C=B$,又A与C互斥,所以$P(A\cup C)=P(A)+P(C)=P(B)$,即$0.3+P(C)=0.32$,所以$P(C)=0.02$.故选C.

6. A 【解析】设A="该成员出现X性状",B="该成员出现Y性状",则$\overline{A}\cap\overline{B}$="该成员$X,Y$两种性状都不出现",则$A\cap B$="该成员$X,Y$两种性状都出现",所以$P(A)=\frac{1}{3}$,$P(B)=\frac{2}{15}$,$P(\overline{A}\cap\overline{B})=\frac{3}{5}$,所以$P(A\cup B)=1-P(\overline{A}\cap\overline{B})=\frac{2}{5}$,又$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$,所以$P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)=\frac{1}{3}+\frac{2}{15}-\frac{2}{5}=\frac{1}{15}$.故选A.

7. B 【解析】对于A,由$P(B)=\frac{1}{3}$,可得$P(\overline{B})=1-P(B)=\frac{2}{3}$,所以A中说法正确;对于B,由$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=\frac{2}{3}$,可得$P(AB)=\frac{1}{6}$,所以B中说法不正确;对于C,由$P(A)=\frac{1}{2}$,$P(B)=\frac{1}{3}$,$P(AB)=\frac{1}{6}$,可得

$P(AB)=P(A)P(B)$，所以 C 中说法正确；对于 D，由 $P(\overline{A}\overline{B})=1-P(AB)=\frac{5}{6}$，$P(\overline{A})P(\overline{B})=\left(1-\frac{1}{2}\right)\times\left(1-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}$，所以 $P(\overline{A}\overline{B})\neq P(\overline{A})P(\overline{B})$，所以 D 中说法正确. 故选 B.

8. ACD 【解析】从装有 2 个红球、4 个白球的袋子中任意摸出 2 个球，该试验的样本空间中共包含 15 个样本点，事件 $A=$“至少摸出 1 个红球”，事件 $B=$“至多摸出 1 个白球”，则事件 A,B 均包含摸出 1 个红球和 1 个白球，摸出 2 个红球这两种情况，则事件 A,B 都包含 $2\times4+1=9$(个)样本点，故 $P(A)=P(B)=\frac{9}{15}=\frac{3}{5}$，故 A 中说法错误，B 中说法正确；$P(A\cup B)=P(A)=\frac{3}{5}$，$P(A)+P(B)=\frac{3}{5}+\frac{3}{5}=\frac{6}{5}$，故 C，D 中说法错误. 故选 ACD.

9. ACD 【解析】对于 A，抛掷一枚质地均匀的骰子一次，并观察向上的点数，样本空间为 $\{1,2,3,4,5,6\}$，共 6 个样本点，$A=\{3,4,5,6\}$，共 4 个样本点，所以 $P(A)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$，故 A 正确；对于 B，$B=\{1,3,5\}$，共 3 个样本点，所以 $P(B)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$，故 B 错误；对于 C，由选项 A，B 知，$A+B=\{1,3,4,5,6\}$，共 5 个样本点，所以 $P(A+B)=\frac{5}{6}$，故 C 正确；对于 D，由选项 A，B 知，$A\cap B=\{3,5\}$，共 2 个样本点，所以 $P(A\cap B)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$，故 D 正确. 故选 ACD.

10. 0.15 【解析】由题知，抽到的是二等品或三等品的概率为 $P(B\cup C)=P(B)+P(C)=0.1+0.05=0.15$.

11. $\frac{1}{8}$ 【解析】因为 $P(B)=\frac{3}{4}$，所以 $P(\overline{B})=1-P(B)=\frac{1}{4}$，故 $P(A\cap\overline{B})=P(A)+P(\overline{B})-P(A\cup\overline{B})=\frac{3}{8}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$.

12. $\frac{7}{10}$ 【解析】设事件 $A=$“中奖”，事件 $A_1=$“抽到的第 1 包零食中奖”，事件 $A_2=$“抽到的第 2 包零食中奖”. 注意到事件 A 的对立事件是“抽到的 2 包零食都不中奖”，由于 $\overline{A_1}\,\overline{A_2}=$“抽到的 2 包零食都不中奖”，而 $n(\overline{A_1}\,\overline{A_2})=3\times2=6$，所以 $P(\overline{A_1}\,\overline{A_2})=\frac{6}{5\times4}=\frac{3}{10}$，因此 $P(A)=1-P(\overline{A_1}\,\overline{A_2})=\frac{7}{10}$.

13. **解**：从擅长游泳与擅长骑自行车的选手中各选出一名，与选手 C_1 组成参赛队，该试验的样本空间 $\Omega=\{(A_1,B_1,C_1),(A_1,B_2,C_1),(A_1,B_3,C_1),(A_2,B_1,C_1),(A_2,B_2,C_1),(A_2,B_3,C_1),(A_3,B_1,C_1),(A_3,B_2,C_1),(A_3,B_3,C_1)\}$，共有 9 个样本点，每一个样本点的出现都是等可能的.

(1)事件 $M=$“A_1 被选中”包含的样本点有 3 个，分别为 $(A_1,B_1,C_1),(A_1,B_2,C_1),(A_1,B_3,C_1)$，

$\therefore P(M)=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$.

(2) 事件 $N=$“A_1,B_1 不全被选中”，则事件 $\overline{N}=\{(A_1,B_1,C_1)\}$，$\therefore$事件“$A_1,B_1$ 不全被选中”发生的概率 $P(N)=1-P(\overline{N})=1-\frac{1}{9}=\frac{8}{9}$.

14. **解**：(1)设 3 名男老师为 A,B,C，2 名女老师为 a,b，则从 5 名老师中选出 2 名老师包含的样本点有 $(A,B),(A,C),(A,a),(A,b),(B,C),(B,a),(B,b),(C,a),(C,b),(a,b)$，共 10 个，

其中选出的老师全是男老师包含的样本点有 $(A,B),(A,C),(B,C)$，共 3 个，故所求概率为 $P_1=\frac{3}{10}$.

(2)方法一：选出的老师中至少有 1 名女老师包含的样本点有 $(A,a),(A,b),(B,a),(B,b),(C,a),(C,b),(a,b)$，共 7 个，故所求概率为 $P_2=\frac{7}{10}$.

方法二：事件“选出的老师中至少有 1 名女老师”与事件“选出的老师全是男老师”互为对立事件，所以选出的老师中至少有 1 名女老师的概率为 $P_2=1-\frac{3}{10}=\frac{7}{10}$.

15. 3，2，4 【解析】记事件 A,B,C 分别表示取出黑球、黄球、绿球，则 A,B,C 为互斥事件，由题意得 $\begin{cases}P(A)+P(B)=\frac{5}{9},\\ P(B)+P(C)=\frac{2}{3},\\ P(A)+P(B)+P(C)=1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}P(A)=\frac{1}{3},\\ P(B)=\frac{2}{9},\\ P(C)=\frac{4}{9},\end{cases}$ 即取出黑球、黄球、绿球的概率分别是 $\frac{1}{3},\frac{2}{9},\frac{4}{9}$，故黑球的个数是 $9\times\frac{1}{3}=3$，黄球的个数是 $9\times\frac{2}{9}=2$，绿球的个数是 $9\times\frac{4}{9}=4$，即袋中黑球、黄球、绿球的个数分别是 3，2，4 .

16. **解**：(1)若当天需求量 $n\geqslant17$，则 $y=85$；
若当天需求量 $n<17$，则 $y=10n-85$.
故 y 关于 n 的函数解析式为 $y=\begin{cases}10n-85,n<17,\\ 85,n\geqslant17\end{cases}(n\in\mathbf{N})$.

(2)(i)这 100 天中有 10 天的日利润为 55 元，20 天的日利润为 65 元，16 天的日利润为 75 元，54 天的日利润为 85 元，所以这 100 天的日平均利润为 $\frac{1}{100}\times(55\times10+65\times20+75\times16+85\times54)=76.4$(元).

(ii)“当天的利润不少于 75 元”即“当天的需求量不少于 16 枝”，故当天的利润不少于 75 元的概率为 $0.16+0.16+0.15+0.13+0.1=0.7$.

10.2 事件的相互独立性

1. A 【解析】由相互独立事件的定义可知选 A.

2. D 【解析】由题意得两人都命中的概率为 $0.9\times0.8=0.72$，故选 D.

3. B 【解析】$\because$事件 M,N 同时发生的对立事件为事件 M,N 至多有一个发生，M,N 是两个相互独立事件，$\therefore$事件 M,N 至多有一个发生的概率为 $1-P(MN)=1-P(M)P(N)$，故选 B.

4. B 【解析】该同学 A,B,C 三道必答题目都回答正确的概率为 $P_1=0.8\times0.7\times0.5=0.28$，故该同学最多有两道题目回答正确的概率为 $P=1-P_1=1-0.28=0.72$. 故选 B.

5. A 【解析】因为 $P(A\cup B)=\frac{5}{6}=P(A)+P(B)-P(AB)=\frac{1}{3}+\frac{3}{4}-P(AB)$，所以 $P(AB)=\frac{1}{4}$，所以 $P(AB)=\frac{1}{4}=\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}=P(A)\cdot P(B)$，故选 A.

6. D 【解析】当开关合上时，电路畅通即表示左边至中间畅通且中间至右边畅通，左边至中间畅通的概率为 $P_1=1-\frac{1}{4}\times\left[1-\left(1-\frac{1}{2}\right)\times\left(1-\frac{1}{3}\right)\right]=\frac{5}{6}$，中间至右边畅通的概率为 $P_2=1-\frac{1}{5}\times\frac{1}{6}=\frac{29}{30}$，所以电路畅通的概率为 $P=P_1P_2=\frac{5}{6}\times\frac{29}{30}=\frac{29}{36}$. 故选 D.

7. C 【解析】依次抛掷一枚质地均匀的骰子两次，两次的结果用有序数对表示，其中第一次在前，第二次在后，样本空间 $\Omega=\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6),(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\}$，共 36 个样本点. 事件 A_1 包含 $(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6)$，共 6 个样本点，$P(A_1)=\frac{1}{6}$. 事件 A_2 包含 $(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6)$，

(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),共 18 个样本点,$P(A_2)=\frac{1}{2}$.事件 A_3 包含(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1),共 5 个样本点,$P(A_3)=\frac{5}{36}$.事件 A_4 包含(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1),共 6 个样本点,$P(A_4)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$.对于 A,$A_3\cap A_4=\varnothing$,$A_3\cup A_4\neq\Omega$,所以 A_3 与 A_4 不为对立事件,故 A 错误;对于 B,事件 A_1A_3 包含(2,4),共 1 个样本点,则 $P(A_1A_3)=\frac{1}{36}$,又 $P(A_1)=\frac{1}{6}$,$P(A_3)=\frac{5}{36}$,所以 $P(A_1)P(A_3)=\frac{1}{6}\times\frac{5}{36}\neq P(A_1A_3)$,即 A_1 与 A_3 不相互独立,故 B 错误;对于 C,事件 A_2A_4 包含(1,6),(3,4),(5,2),共 3 个样本点,则 $P(A_2A_4)=\frac{1}{12}$,又 $P(A_2)=\frac{1}{2}$,$P(A_4)=\frac{1}{6}$,所以 $P(A_2)P(A_4)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{12}=P(A_2A_4)$,即 A_2 与 A_4 相互独立,故 C 正确;对于 D,事件 A_2A_4 包含(1,6),(3,4),(5,2),共 3 个样本点,则 $A_2\cap A_4\neq\varnothing$,即 A_2 与 A_4 不为互斥事件,故 D 错误.故选 C.

8. ABD **【解析】** 对于 A,如果 $B\subseteq A$,那么 $P(A\cup B)=P(A)=0.6$,$P(AB)=P(B)=0.3$,故 A 正确;对于 B,如果 A 与 B 互斥,那么 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)=0.9$,$P(AB)=0$,故 B 正确;对于 C,如果 A 与 B 相互独立,那么 $P(AB)=P(A)P(B)=0.18$,故 C 错误;对于 D,如果 A 与 B 相互独立,那么 $P(\overline{A}\,\overline{B})=P(\overline{A})P(\overline{B})=0.4\times0.7=0.28$,$P(\overline{A}B)=P(\overline{A})P(B)=0.4\times0.3=0.12$,故 D 正确.故选 ABD.

9. AB **【解析】** 对于 A,事件 A 发生与否与事件 B 发生与否相互间没有影响,∴A 与 B 相互独立,故 A 正确;对于 B,$P(A)=\frac{1}{6}$,$P(D)=\frac{1}{6}$,$P(AD)=\frac{1}{36}$,∴$P(AD)=P(A)\times P(D)$,∴A 与 D 相互独立,故 B 正确;对于 C,事件 B 发生与否与事件 C 发生与否有关系,∴B 与 C 不是相互独立事件,故 C 错误;对于 D,事件 C 发生与否与事件 D 发生与否有关系,∴C 与 D 不相互独立,故 D 错误.故选 AB.

10. $\frac{1}{4}$ **【解析】** ∵A,B 是相互独立事件,且 $P(A)=\frac{1}{3}$,$P(B)=\frac{3}{4}$,∴$P(AB)=P(A)P(B)=\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$.

11. $\frac{3}{5}$ **【解析】** 设 A,B 分别表示事件"一次投篮中甲命中"和"一次投篮中乙命中",所以 $P(A)=\frac{4}{5}$,$P(B)=\frac{1}{3}$,则甲、乙两人各投篮一次,恰有一人命中的概率为 $P(A\overline{B}\cup\overline{A}B)=P(A\overline{B})+P(\overline{A}B)=\frac{4}{5}\times\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(1-\frac{4}{5}\right)\times\frac{1}{3}=\frac{3}{5}$.

12. 0.236 **【解析】** 设 $A_i(i=1,2,3,4)$ 为独孤队第 i 局获胜,由题意,独孤队不超过四局就赢得比赛的可能结果为四个互斥事件 $A_1A_2A_3$,$A_1A_2\overline{A_3}A_4$,$A_1\overline{A_2}A_3A_4$,$\overline{A_1}A_2A_3A_4$,所以所求概率 $P=P(A_1A_2A_3)+P(A_1A_2\overline{A_3}A_4)+P(A_1\overline{A_2}A_3A_4)+P(\overline{A_1}A_2A_3A_4)=0.4\times0.5\times0.6+0.4\times0.5\times0.4\times0.5+0.4\times0.5\times0.4\times0.5+0.6\times0.3\times0.4\times0.5=0.236$.

13. **解**:(1)设"该应试者两道题都答对"为事件 A,
则 $P(A)=0.9\times0.8=0.72$.
(2)设该应试者只答对一题为事件 B,则 $P(B)=0.9\times(1-0.8)+(1-0.9)\times0.8=0.26$.

14. **解**:(1)设 $A=$"小明在甲处投进",$B=$"小明在乙处投进",
于是 $P(A)=\frac{1}{4}$,$P(B)=\frac{4}{5}$,
故小明最终得 3 分的概率 $P=P(A\overline{B}\,\overline{B})=P(A)P(\overline{B})P(\overline{B})=\frac{1}{4}\times\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}=\frac{1}{100}$.
(2)小明选择都在乙处投篮,通过测试的概率 $P_1=P(BB)+P(\overline{B}BB)+P(B\overline{B}B)=\frac{4}{5}\times\frac{4}{5}+\frac{1}{5}\times\frac{4}{5}\times\frac{4}{5}+\frac{4}{5}\times\frac{1}{5}\times\frac{4}{5}=\frac{112}{125}$;
小明选择在甲处投一球,以后都在乙处投,通过测试的概率 $P_2=P(AB)+P(A\overline{B}B)+P(\overline{A}BB)=\frac{1}{4}\times\frac{4}{5}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{5}\times\frac{4}{5}+\frac{3}{4}\times\frac{4}{5}\times\frac{4}{5}=\frac{18}{25}$.
因为 $P_1-P_2=\frac{112}{125}-\frac{18}{25}=\frac{22}{125}>0$,所以小明选择都在乙处投篮通过测试的概率更大.

15. $\frac{13}{30}$ **【解析】** 甲、乙、丙三个家庭回答正确的概率分别记为 P_1,P_2,P_3,由题意知 $P_1=\frac{2}{3}$,$\left(1-\frac{2}{3}\right)(1-P_3)=\frac{1}{15}$,则 $P_3=\frac{4}{5}$,$P_2P_3=P_2\cdot\frac{4}{5}=\frac{3}{5}$,则 $P_2=\frac{3}{4}$,所以甲、乙、丙三个家庭中恰好有两个家庭回答正确这道题的概率 $P=P_1P_2(1-P_3)+P_1(1-P_2)P_3+(1-P_1)P_2P_3=\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\left(1-\frac{4}{5}\right)+\frac{2}{3}\times\left(1-\frac{3}{4}\right)\times\frac{4}{5}+\left(1-\frac{2}{3}\right)\times\frac{3}{4}\times\frac{4}{5}=\frac{13}{30}$.

16. **解**:(1)甲、乙各射出一支箭,设 $A=$"甲运动员命中 8 环及以上",$B=$"乙运动员命中 8 环及以上",$C=$"有人命中 8 环及以上",
则 $P(A)=\frac{66}{72}=\frac{11}{12}$,$P(B)=\frac{60}{72}=\frac{5}{6}$,
显然事件 A,B 相互独立,$C=A\cup B$,
则 $P(C)=P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=P(A)+P(B)-P(A)\cdot P(B)=\frac{11}{12}+\frac{5}{6}-\frac{11}{12}\times\frac{5}{6}=\frac{71}{72}$,
∴甲、乙各射出一支箭,有人命中 8 环及以上的概率为 $\frac{71}{72}$.
(2)设 $A_i=$"甲运动员第 i 支箭命中黄心",$B_i=$"乙运动员第 i 支箭命中黄心",$i=1,2$,
∴$P(A_i)=\frac{36+24}{72}=\frac{5}{6}$,$P(B_i)=\frac{36+12}{72}=\frac{2}{3}$,
设 $E=$"共有 3 支箭命中黄心",则 $E=A_1A_2B_1\overline{B_2}+A_1A_2\overline{B_1}B_2+A_1\overline{A_2}B_1B_2+\overline{A_1}A_2B_1B_2$,
∵A_1,A_2,B_1,B_2 相互独立,
$A_1A_2B_1\overline{B_2}$,$A_1A_2\overline{B_1}B_2$,$A_1\overline{A_2}B_1B_2$,$\overline{A_1}A_2B_1B_2$ 彼此互斥,
∴甲、乙各射出两支箭,共有 3 支箭命中黄心的概率为 $P(E)=P(A_1A_2B_1\overline{B_2}+A_1A_2\overline{B_1}B_2+A_1\overline{A_2}B_1B_2+\overline{A_1}A_2B_1B_2)=\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}+\frac{5}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{35}{81}$.

10.3 频率与概率

10.3.1 频率的稳定性

10.3.2 随机模拟

1. C **【解析】** 对于 A,概率是定值,故本选项错误;对于 B,可以相等,如"抛硬币试验",可得到正面向上的频率为 0.5,与概率相等,故本选项错误;对于 C,当试验次数很大时,频率稳定在概率附近,故本选项正确;对于 D,频率只能估计概率,故本选项错误.故选 C.

2. C **【解析】** 概率是频率的稳定值,A 发生的概率等于 $\frac{1}{2}$,故 A,B 错误;A 在这 10 次试验中发生的频率为 $\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$,故 C 正确,D 错误.故选 C.

3. A **【解析】** 对于 A,随着试验次数的增大,随机事件发生的

频率会逐渐稳定于该随机事件发生的概率，概率是频率的稳定值，故 A 正确；对于 B，某种福利彩票的中奖概率为$\frac{1}{1000}$，买 1000 张这种彩票不一定中奖，故 B 错误；对于 C，连续 100 次掷一枚质地均匀的硬币，结果出现了 49 次反面向上，则在 100 次抛硬币的试验中出现反面向上的频率为$\frac{49}{100}$，而掷一枚质地均匀的硬币出现反面向上的概率为$\frac{1}{2}$，故 C 错误；对于 D，某市气象台预报“明天本市降水概率为 70%”，指的是明天会降水的可能性为 70%，故 D 错误. 故选 A.

4. A 【解析】由题意知，∵有放回地取 100 次，每次取一张卡片并记下号码，∴总次数是 100，由表可以看出取到号码为奇数的卡片有 $13+5+6+18+11=53$（次），∴频率 $=\frac{53}{100}=0.53$，故选 A.

5. D 【解析】对于 A 选项，如果四面体是均匀的，那么理论上每个面落地的次数仍旧可能不一样，在均匀的条件下，随着试验次数的增多，每个面落地的次数将会变得越来越接近，换句话说，即使是均匀的四面体，仅仅在 200 次试验中，得到落地的面的统计结果也可能不一样，A 选项错误. 对于 B，C，D 选项，由于这 200 次试验中标记 2，3，4 的面落在地上的频率分别为$\frac{36}{200}$，$\frac{42}{200}$，$\frac{78}{200}$，即 0.18，0.21，0.39，B 选项中所估计的概率 0.72 和频率 0.18 差距过大，C 选项认为标记 4 的面一定落地，是必然事件，概率为 1，但频率只有 0.39，因此不能认为必然发生，B，C 选项错误；D 选项中估计标记 3 的面落地的概率是 0.21，D 选项正确. 故选 D.

6. A 【解析】由题意可知，随机模拟试验产生了 20 组随机数，代表“3 次中至少 2 次命中 8 环以上”的数组共 18 组，因此，估计该选手投掷 1 轮，成绩优秀的概率为$\frac{18}{20}=\frac{9}{10}$. 故选 A.

7. B 【解析】由题意知，经随机模拟产生的 20 组随机数中表示三次投篮恰有两次命中的有 137，191，271，932，812，393，共 6 组随机数，所以估计所求概率为$\frac{6}{20}=0.30$，故选 B.

8. ACD 【解析】在 A 中，抛掷一枚质地均匀的骰子，点数为 6 的概率是$\frac{1}{6}$，只能说明每掷 6 次就可能有一次掷得点数 6，故 A 中说法错误；在 B 中，抛掷一枚质地均匀的硬币，由概率的定义得，试验 200 次出现正面的频率不一定比试验 100 次出现正面的频率更接近概率，故 B 中说法正确；在 C 中，某地气象局预报说，明天本地下雨的概率为 80%，是指明天本地有 80% 的可能性会下雨，故 C 中说法错误；在 D 中，随机事件 A，B 中至少有一个发生的概率不一定比 A，B 中恰有一个发生的概率大，如 A=“掷一枚质地均匀的骰子一次，向上的点数是偶数”，B=“掷一枚质地均匀的骰子一次，向上的点数是奇数”，则 A，B 中至少有一个发生的概率是 1，A，B 中恰有一个发生的概率也是 1，故 D 中说法错误. 故选 ACD.

9. ABC 【解析】由频率估计概率得 $P(A)=\frac{55}{100}=0.55$，故 A 正确；$P(B)=\frac{18}{100}=0.18$，故 B 正确；$P(C)=1-P(A)-P(B)=1-0.55-0.18=0.27$，故 C 正确；$P(B+C)=P(B)+P(C)=0.18+0.27=0.45$，故 D 错误. 故选 ABC.

10. 16 【解析】设袋子中红球约有 x 个，根据题意，得$\frac{x}{4+x}=0.8$，解得 $x=16$，所以袋子中红球约有 16 个.

11. 0.615 【解析】由题意知，试验次数越多，频率越接近概率，对概率的估计误差就越小，所以使误差较小的估计值最可能是 0.615.

12. $\frac{17}{20}$ 【解析】根据题意，这 20 组随机数中表示一次也没有击中目标的有 956，556，989，共有 3 组，所以估计三次发射至少有一次击中目标的概率 $P=1-\frac{3}{20}=\frac{17}{20}$.

13. **解**：(1)

分组	频数	频率
[39.95，39.97)	10	0.1
[39.97，39.99)	20	0.2
[39.99，40.01)	50	0.5
[40.01，40.03]	20	0.2
合计	100	1.0

(2)标准尺寸是 40.00 mm，若要使误差不超过 0.03 mm，则直径应落在[39.97，40.03]内.
由(1)中表知，直径落在[39.97，40.03]内的频率为 $0.2+0.5+0.2=0.9$，所以估计这批乒乓球的直径误差不超过 0.03 mm 的概率为 0.9.

14. **解**：由题意可知，每个被调查者从袋中摸出红球、绿球、白球的概率都是$\frac{1}{3}$，由此估计有 $300\times\frac{1}{3}=100$(名)学生回答了第一个问题，有 $300\times\frac{1}{3}=100$(名)学生不回答任何问题，有 $300\times\frac{1}{3}=100$(名)学生回答了第二个问题.
易知每个被调查者的阳历生日月份是奇数的概率为$\frac{1}{2}$，
所以可估计回答第一个问题的 100 名学生中大约有 50 名学生回答了“是”，所以我们能推出在回答第二个问题的 100 名学生中大约有 3 名学生回答了“是”，故该学校大约有 3% 的学生经常缺交作业，也就是全校大约有 36 名学生经常缺交作业.

15. 28 【解析】由于用前 n 个区间的平均长度$\frac{x_n}{n}$估计所有 $(n+1)$ 个区间的平均长度$\frac{N}{n+1}$，而缴获坦克的编号是 3，8，12，18，20，24，即 $n=6$，$x_6=24$，故$\frac{24}{6}=\frac{N}{6+1}$，所以 $N=28$，即统计学家利用上述方法估计 A 军该月生产的坦克数约为 28 辆.

16. **解**：利用计算器或计算机生成 0～9 之间取整数值的随机数，用 0，1，2，3，4，5 表示甲获胜，6，7，8，9 表示乙获胜，这样能体现甲获胜的概率为 0.6. 因为采用三局两胜制，所以每 3 个随机数作为一组. 例如，产生 30 组随机数：

034 743 738 636 964 736 614 698 637 162
332 616 804 560 111 410 959 774 246 762
428 114 572 042 533 237 322 707 360 751

这就相当于做了 30 次重复试验.
如果一组随机数中恰有 2 个或 3 个数在{6，7，8，9}中，就表示乙获胜，那么满足条件的随机数分别是 738，636，964，736，698，637，616，959，774，762，707，共 11 个.
所以采用三局两胜制，乙获胜的概率约为$\frac{11}{30}\approx0.367$.

滚动习题（九）

1. D 【解析】对于 A，抛掷硬币 10 次，事件 A 可能发生 5 次，故 A 错误；对于 B，抛掷硬币 100 次，事件 A 可能发生 50 次，故 B 错误；对于 C，抛掷硬币 1000 次，事件 A 发生的频率接近 0.5，故 C 错误；对于 D，随着抛掷硬币次数的增多，事件 A 发生的频率接近 0.5，则事件 A 发生的频率在 0.5 附近波动的幅度较大的可能性小，故 D 正确. 故选 D.

2. B 【解析】因为 A，B 为两个互斥事件，$P(A)>0$，$P(B)>0$，所以 $A\cap B=\varnothing$，即 $P(AB)=0$，且 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$. 故选 B.

3. C 【解析】掷一枚质地均匀的骰子，朝上的一面的点数可以是奇数，即朝上一面的点数为偶数的事件不一定发生，A 不正确；10 张票中只有 1 张有奖，10 人去拿，每人拿到的可能性相同，无论谁先拿，拿到奖票的概率都是 0.1，B 不正确；至少取到 2 件次品的对立事件是至多取到 1 件次品，C 正确；若 A，B 是互斥事件，则 $P(B)=P(A+B)-P(A)=0.3$，D 不正确. 故选 C.

4. C 【解析】从集合{1,2,3,4,5}中任取两个不同的数，则样本空间 $\Omega=\{(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(2,3),(2,4),(2,5),(3,4),(3,5),(4,5)\}$，则 $n(\Omega)=10$，设事件 A="两个数的和不小于5"，则 $A=\{(1,4),(1,5),(2,3),(2,4),(2,5),(3,4),(3,5),(4,5)\}$，则 $n(A)=8$，所以这两个数的和不小于5的概率为 $P(A)=\frac{8}{10}=\frac{4}{5}$. 故选C.

5. B 【解析】根据所给的数据的分组和各组的频数知，大于或等于31.5的数据共有 $12+7+3=22$(个)，又样本量为66，所以大于或等于31.5的数据的频率为 $\frac{22}{66}=\frac{1}{3}$，所以可估计在总体中大于或等于31.5的数据占 $\frac{1}{3}$. 故选B.

6. C 【解析】设事件 A 为"所有二等品被取出时恰取出3件产品检验"，该事件的发生有三步，最后一次必取出二等品，前两次中有一次取出二等品，故 $P(A)=\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{1}{3}+\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{5}$. 故选C.

7. BCD 【解析】对于A,C选项，因为 $P(C)=\frac{1}{4}$，$P(D)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$，$P(CD)=\frac{1}{8}$，所以 $P(C)\times P(D)=P(CD)$，所以 C 与 D 相互独立，故A选项错误，C选项正确；对于B选项，E 与 F 不会同时发生，故它们互斥，故B选项正确；对于D选项，因为 $P(F)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$，$P(DF)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$，所以 $P(D)\times P(F)=P(DF)$，故 D 与 F 相互独立，故D选项正确. 故选BCD.

8. AD 【解析】对于A，有放回地依次随机选取两张标签包含的样本点有 $5\times5=25$(个)，其中标号相等包含的样本点有5个，所以所求概率 $P_1=\frac{5}{25}=\frac{1}{5}$，所以A正确；对于B，有放回地依次随机选取两张标签包含的样本点有 $5\times5=25$(个)，其中第一次的标号大于第二次包含的样本点有10个，所以所求概率 $P_2=\frac{10}{25}=\frac{2}{5}$，所以B不正确；对于C，无放回地依次随机选取两张标签包含的样本点有 $5\times4=20$(个)，其中标号之和为5包含的样本点有4个，所以所求概率 $P_3=\frac{4}{20}=\frac{1}{5}$，所以C不正确；对于D，无放回地依次随机选取两张标签包含的样本点有 $5\times4=20$(个)，其中第一次的标号大于第二次包含的样本点有10个，所以所求概率 $P_4=\frac{10}{20}=\frac{1}{2}$，所以D正确. 故选AD.

9. $\frac{3}{4}$ 【解析】表示恰好击中0次的随机数为3312，共1个，表示恰好击中1次的随机数为0293,0371,6233,6011，共4个，故表示至多击中1次的随机数共5个，则表示至少击中2次的随机数共15个，故所求概率为 $\frac{15}{20}=\frac{3}{4}$.

10. 0.95 【解析】设 A="小张语文成绩及格"，B="小张数学成绩及格"，则 AB="小张语文和数学成绩同时及格"，$A\cup B$="小张语文和数学两科至少有一科成绩及格". 由已知得，$P(A)=0.8$，$P(B)=0.9$，$P(AB)=0.75$，代入 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$，得 $P(A\cup B)=0.8+0.9-0.75=0.95$.

11. $\frac{5}{6}$ 【解析】记2名男生为 a,b，2名女生为 A,B，任选2人参加围棋比赛包含的样本点有 $(a,b),(a,A),(a,B),(b,A),(b,B),(A,B)$，共6个，其中"所选2人中至少有1名男生"包含的样本点有 $(a,b),(a,A),(a,B),(b,A),(b,B)$，共5个，故所选2人中至少有1名男生的概率为 $\frac{5}{6}$.

12. 0.8 【解析】设该题被乙独立解出的概率为 P，又该题被甲独立解出的概率为0.6，则甲、乙两人都解不出来的概率为 $P_1=(1-0.6)\cdot(1-P)$，又因为该题被甲或乙解出的概率为0.92，所以 $1-P_1=0.92$，即 $1-(1-0.6)\cdot(1-P)=0.92$，故 $0.4(1-P)=0.08$，解得 $P=0.8$.

13. **解**：(1)记"甲射击一次，命中7环以下"为事件 A，则 $P(A)=1-0.56-0.22-0.12=0.1$.
记"甲射击一次，命中7环"为事件 B，则 $P(B)=0.12$.
由于在一次射击中，A 与 B 不可能同时发生，故 A 与 B 是互斥事件. 事件"甲射击一次，命中不足8环"即为 $A+B$，由互斥事件的概率加法公式知，$P(A+B)=P(A)+P(B)=0.1+0.12=0.22$，
故甲射击一次，命中不足8环的概率是0.22.
(2)方法一：记"甲射击一次，命中8环"为事件 C，
"甲射击一次，命中9环及以上"为事件 D，
则事件"甲射击一次，至少命中7环"为 $B+C+D$，
则 $P(B+C+D)=P(B)+P(C)+P(D)=0.12+0.22+0.56=0.9$，故甲射击一次，至少命中7环的概率为0.9.
方法二：因为"甲射击一次，至少命中7环"为事件 $\overline{A}$，
所以 $P(\overline{A})=1-P(A)=1-0.1=0.9$，
故甲射击一次，至少命中7环的概率为0.9.

14. **解**：(1)设 A 盒中的4个红球分别为 a_1,a_2,a_3,a_4，2个白球分别为 b_1,b_2，则甲从 A 盒中一次抽取2个球包含的样本点有 $(a_1,a_2),(a_1,a_3),(a_1,a_4),(a_1,b_1),(a_1,b_2),(a_2,a_3),(a_2,a_4),(a_2,b_1),(a_2,b_2),(a_3,a_4),(a_3,b_1),(a_3,b_2),(a_4,b_1),(a_4,b_2),(b_1,b_2)$，共15个，2个球颜色不同包含的样本点有 $(a_1,b_1),(a_1,b_2),(a_2,b_1),(a_2,b_2),(a_3,b_1),(a_3,b_2),(a_4,b_1),(a_4,b_2)$，共8个，所以甲从 A 盒中一次抽取2个球，2个球颜色不同的概率为 $P_1=\frac{8}{15}$.
(2)由题意知，甲、乙共抽到3个红球的情况及概率如下：
①甲第一次抽到红球，第二次抽到白球，乙两次都抽到红球的概率为 $P_2=\frac{4}{6}\times\frac{2}{6}\times\frac{2}{4}\times\frac{2}{4}=\frac{1}{18}$；
②甲第一次抽到白球，第二次抽到红球，乙两次都抽到红球的概率为 $P_3=\frac{2}{6}\times\frac{4}{6}\times\frac{2}{4}\times\frac{2}{4}=\frac{1}{18}$；
③甲两次都抽到红球，乙第一次抽到红球，第二次抽到白球的概率为 $P_4=\frac{4}{6}\times\frac{4}{6}\times\frac{2}{4}\times\frac{2}{4}=\frac{1}{9}$；
④甲两次都抽到红球，乙第一次抽到白球，第二次抽到红球的概率为 $P_5=\frac{4}{6}\times\frac{4}{6}\times\frac{2}{4}\times\frac{2}{4}=\frac{1}{9}$.
所以甲、乙共抽到3个红球的概率为 $P=\frac{1}{18}+\frac{1}{18}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}=\frac{1}{3}$.

15. **解**：(1)由频率分布直方图，可估计参加竞赛的2000名学生得分的众数为 $\frac{70+80}{2}=75$.
设参加竞赛的2000名学生得分的中位数的估计值为 x，则 $x\in[70,80)$，
由题意可得 $0.04(80-x)+0.2=0.5$，解得 $x=72.5$，
故估计参加竞赛的2000名学生得分的中位数为72.5.
(2)因为得分在[60,70)内和在[70,80)内的学生人数之比为1∶2，
所以应从得分在[60,70)内的学生中抽出2人，记这2人分别为 A,B，从得分在[70,80)内的学生中抽出4人，记这4人分别为 C,D,E,F，
从这6名学生中随机选出2人，则该试验的样本空间 $\Omega=\{(A,B),(A,C),(A,D),(A,E),(A,F),(B,C),(B,D),(B,E),(B,F),(C,D),(C,E),(C,F),(D,E),(D,F),(E,F)\}$，共包含15个样本点.
设事件 M="选出的2人竞赛得分都不低于70"，
则 $M=\{(C,D),(C,E),(C,F),(D,E),(D,F),(E,F)\}$，共包含6个样本点，
则 $P(M)=\frac{6}{15}=\frac{2}{5}$，即选出的2人竞赛得分都不低于70的概率为 $\frac{2}{5}$.